目　錄

I. 直交函數

1. 緒言,記號,定義

本章目的在使讀者認識複變直交函數理論的基本技巧．其中有許多處理形式係仿照實變直交函數的經典理論，在現在情況下，不會遇及如在富里埃級數理論中所發生的困難；而且所得最後結果亦頗爲相異．

設有定義於 B 域的單值解析函數 $f(z)$．假定 B 是有界的，因此僅有有限的面積；用 $d\omega=dx\,dy$ 表示 B 的面積元素及 $\bar{z}$ 表示 z 的共軛複數．所有積分都在勒貝格意義下考慮．如果不顯示積分域時，乃指積分在 B 域上全面進行． $\mathfrak{L}^2=\mathfrak{L}^2(B)$表示在 B 中的正則且單值的函數 $f(z)$，並且適合

$$\iint_B |f(z)|^2\,d\omega<\infty \tag{1}$$

的函數類．在本章內我們所討論的函數都在 $\mathfrak{L}^2$ 內．

二函數 f 及 g 的數積定義如下式

$$J_B(f,\,\bar{g})=\iint_B f\bar{g}\,d\omega, \tag{2}$$

一函數對自身的數積可簡寫成

$$J_B(f)=J_B(f,\,\bar{f}). \tag{3}$$

$J_B(f)$恆爲非負實數，並且僅當 $f=0$ 時爲零．有時 J_B 可直接寫成 J.

我們將常用的雪瓦茲(Schwarz)不等式表出如下：

$$|J(f,\,\bar{g})|^2\leqslant J(f)\cdot J(g). \tag{4}$$

右端積分之存在保證了左端積分的存在．

稱函數組 $f_\nu,\nu=1,\,2,\,\cdots,\,n$ 爲綫性無關，若無綫性組合

$$F(z)=a_1f_1(z)+a_2f_2(z)+\cdots+a_nf_n(z)$$

恆等於零；除非 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. 成綫性無關的充要條件是[1)]

$$\begin{vmatrix} J(f_1,\bar{f}_1) & \cdots & J(f_1,\bar{f}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ J(f_n,\bar{f}_1) & \cdots & J(f_n,\bar{f}_n) \end{vmatrix}>0. \tag{5}$$

實際上，對於 $\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^2>0$, (5) 式顯然即相當於條件 $J_B(F)>0$.

函數系 $\{\phi_\nu(z)\}$, $\nu=1, 2, \cdots$, $\phi_\nu\in\mathfrak{L}^2$, 稱爲**直交的**；若

$$J(\phi_\nu, \bar{\phi}_\mu)=0, \qquad \nu\neq\mu, \tag{6}$$

$$J(\phi_\nu)>0. \tag{7}$$

稱爲**就範的**；若

$$J(\phi_\nu)=1. \tag{8}$$

稱爲**就範直交的**；若既直交且就範的，即 $J(\phi_\nu, \phi_\mu)=\delta_{\nu\mu}$, 此處 $\delta_{\nu\mu}$ 乃是克朗尼克(Kronecker)記號.

例 若 B 爲圓域 $|z|<r$, 可作一就範直交函數系爲

$$\phi_n(z)=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{z^{n-1}}{r^n}. \tag{9}$$

若 B 爲環域 $0<r<|z|<1$, 可作就範直交函數系爲

$$\begin{aligned} \phi_{2n-1}&=z^{n-1}\left(\frac{n}{\pi(1-r^{2n})}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad n=1, 2, \cdots, \\ \phi_2&=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{-2\pi\log r}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \phi_{2n}&=\frac{1}{z^n}\left(\frac{1-n}{\pi(1-r^{-2(n-1)})}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n=2, 3, \cdots. \end{aligned} \tag{10}$$

複的就範直交函數有許多性質相同於實富里埃級數. 其中最顯著的性質如下：

若 $f(z)\in\mathfrak{L}^2$, 則數

$$a_\nu=J(f, \bar{\phi}_\nu) \tag{11}$$

稱爲 f 的**富里埃係數**. 當 n 固定時，綫性組合

$$\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\phi_\nu(z) \tag{12}$$

1) [13, 223 頁]括號內所列的參考書是列在本書參考文獻之前.

只在 $c_\nu=a_\nu$ 時,給出 $f(z)$ 對平均平方誤差的最佳近似值．換句話說,積分

$$J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\phi_\nu\right) \tag{A}$$

當 $c_\nu=a_\nu(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$時取得極小值．因爲

$$\begin{aligned}J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\phi_\nu\right)&=\iint_B\left|f-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\phi_\nu\right|^2 d\omega=\\&=J(f)-\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu J(\bar{f},\phi_\nu)-\sum_{\nu=1}^{n}\bar{c}_\nu J(f,\bar{\phi}_\nu)+\sum_{\nu=1}^{n}|c_\nu|^2=\\&=J(f)-\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2+\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2-\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\bar{a}_\nu-\\&\qquad-\sum_{\nu=1}^{n}\bar{c}_\nu a_\nu+\sum_{\nu=1}^{n}|c_\nu|^2=\\&=J(f)-\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2+\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu-c_\nu|^2.\end{aligned}$$

上式的極小值顯然當 $a_\nu=c_\nu$ 時得到．且等於

$$J(f)-\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2, \tag{13}$$

因此

$$\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2\leqslant J(f). \tag{13a}$$

因爲 (13a) 對於一切 n 都成立，所以有貝塞爾不等式（Bessel inequality）

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2\leqslant J(f). \tag{14}$$

若 $\mathfrak{L}^2$ 內每一函數能以(12)式之綫性組合形式在平均平方誤差(A)可爲任意小的意義下接近,則系 $\{\phi_\nu\}$ 稱爲閉的．此時當 $n\to\infty$ 則(13)的極小值趨近於零,且貝塞爾不等式變成巴塞佛爾公式(Parseval formula)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2=J(f). \tag{15}$$

另一方面，若對每一個 $f\in\mathfrak{L}^2$ 使(15)成立．則系 $\{\phi_\nu\}$ 是閉的．

諸綫性無關的函數所組成的序列 $\{\psi_\nu(z)\}$ 可使之直交化．我們能找出由 ψ_μ 綫性組合成的函數 $\phi_\nu(z)$，它們組成一就範直交系．這可以用格蘭姆-施密特 (Gram-Schmidt) 法來做[1]，而且導出就範直交函數

$$\phi_1(z)=\frac{\psi_1(z)}{(J(\psi_1,\overline{\psi}_1))^{\frac{1}{2}}},$$

$$\phi_n(z)=\frac{\begin{vmatrix} J(\psi_1,\overline{\psi}_1)\cdots J(\psi_1,\overline{\psi}_{n-1}) & \psi_1(z)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots\\ J(\psi_n,\overline{\psi}_1)\cdots J(\psi_n,\overline{\psi}_{n-1}) & \psi_n(z)\end{vmatrix}}{\left[\begin{vmatrix} J(\psi_1,\overline{\psi}_1)\cdots J(\psi_1,\overline{\psi}_{n-1})\\ \vdots \qquad \vdots\\ J(\psi_{n-1},\overline{\psi}_1)\cdots J(\psi_{n-1},\overline{\psi}_{n-1})\end{vmatrix}\begin{vmatrix} J(\psi_1,\overline{\psi}_1)\cdots J(\psi_1,\overline{\psi}_n)\\ \vdots \qquad \vdots\\ J(\psi_n,\overline{\psi}_1)\cdots J(\psi_n,\overline{\psi}_n)\end{vmatrix}\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (16)$$

$$n>1.$$

若 ψ_n 是 z 的冪函數，即若 $\psi_\mu(z)=z^{\mu-1}$, $\mu=1, 2, \cdots$, 則格蘭姆-施密特方法引出了直交多項式．

在特殊域中，上式行列式裏出現的二重積分可完整地計算出來．例如以 $\psi_\mu=z^{\mu-1}$ 的多角域． 若 N 角域 B 由 B 內任一點 O 向多角形頂點聯綫而分裂成諸三角形[2] $B_kOA_k(k=1, 2, \cdots, N)$,

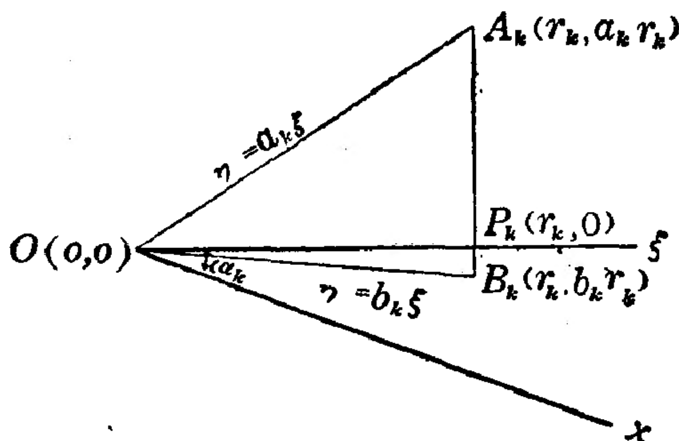


圖 1

1) 參閱[4, 卷 I, 41 頁]; [14, 251 頁]; [18, 57 頁].

2) 注意，B 的每一頂點是變名的：每一 A_k 亦即爲一 B_{k+1}.

則

$$J(z^{p-1}, \bar{z}^{q-1}) = \iint_B z^{p-1}\bar{z}^{q-1}\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{p+q-2} i^j e^{i\alpha_k(p-q)} C_j^{(p-1,q-1)} \frac{n_k^{p+q}(a_k^{j+1}-b_k^{j+1})}{(p+q)(j+1)} (p,q=1,2,\cdots),$$

其中

$$C_j^{(m,n)} = \sum_{\nu=\max(0,j-n)}^{\min(m,j)} \binom{m}{j}\binom{n}{j-\nu}\left(-1\right)^{j-\nu},$$

r_k 是由 O 點向 A_kB_k 邊所作垂直綫 OP_k 的長度；α_k 是 OP_k 及正向 x 軸間的交角；a_k 及 b_k 各爲方向角 P_kOA_k 及 P_kOB_k 的正切值.

上式內 J 是由於在每一三角形內引入新坐標 ξ, η 而導得，而 $\zeta=\xi+i\eta=ze^{i\alpha_k}$，此處正 ξ 軸係取自 A_kB_k 邊的外向法綫 OP_k. 在此新坐標下在三角形 B_kOA_k 域上的積分變換成

$$\int_{\xi=0}^{r_k}\int_{\eta=b_k\xi}^{a_k\xi} (\xi+i\eta)^{p-1}(\xi-i\eta)^{q-1}e^{i\alpha_k(p-q)}\,d\eta\,d\xi.$$

2. 李滋-費葉定理

在本節內我們要證明一類似於富里埃級數理論中的李滋-費葉(Riesz-Fischer)定理的結果. 爲了證明時主要方向淸楚起見我們先證明二個引理. 第一個引理如下：

若 $f(z)$ 是 $\mathfrak{L}^2(B)$ 內一函數且 $f(t)=1$，其中 $t\in B$. 於是我們有

$$J(f)\geqslant \pi r^2, \tag{17}$$

此處 r 是點 t 到 B 的邊界的最小距離.

在圓 $|z-t|<r-\varepsilon=R$ 中，$f(z)$ 可展開爲勻斂的戴勞級數

$$f(z)=1+a_1(z-t)+a_2(z-t)^2+\cdots.$$

令 $\zeta=\rho e^{i\psi}=z-t$. 我們有

$$J(f)=\iint_B |f|^2\,d\omega > \iint_{|\zeta|<R}|f|^2\,d\omega,$$

$$\iint_{|\zeta|<R}|f|^2 d\omega = \iint_{|\zeta|<R}(1+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots)(1+\bar{a}_1\bar{\zeta}+\bar{a}_2\bar{\zeta}^2+\cdots)\,d\omega =$$

$$= \iint_{|z|<R} d\omega + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\rho^{n+1}e^{in\psi}\,d\psi +$$

$$+\bar{a}_n\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\rho^{n+1}e^{-in\psi}\,d\psi\Big\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\bar{a}_n\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\rho^{n+m+1}e^{i(m-n)\psi}d\psi=$$

$$=\pi R^2+2\pi\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\frac{R^{2(n+1)}}{2(n+1)}\geqslant\pi R^2.$$

因此

$$J(f)\geqslant\pi(r-\varepsilon)^2.$$

因爲 ε 可任意小, 故得所要求的結果.

藉助於(17)式, 可證第二個引理:

設 $\{\phi_\nu(z)\}$, $\nu=1, 2, \cdots$, 是對於 B 的一個就範直交系, 則有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2\leqslant\frac{1}{\pi r^2}, \tag{18}$$

此處 r 是從點 t 到域 B 的界的極小距離.

決定函數 $f(z)$ 它可以記成形式

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu\phi_\nu(z), \tag{19}$$

且於條件

$$f(t)=1 \tag{20}$$

之下使積分 $J(f)$ 極小.

我們寫

$$A_\nu=\frac{\overline{\phi_\nu(t)}}{\sum_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2}+\alpha_\nu,$$

此處 α_ν 爲新的未知數, 顯而易見(20)相當於

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\phi_\nu(t)=0.$$

若用此式, 容易算出

$$J(f)=\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2}+\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^2.$$

因此當 $A_\nu=\overline{\phi_\nu(t)}\Big/\sum_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2$ 時 $J(f)$ 達到最小值, 並且等於

$$\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2}.$$

由(17)此極小值不小於 πr^2，而 $r=r(t)$ 是 t 到邊界上最近點的距離．因此

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\phi_\nu(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi r^2}.$$

而且，不等式的右端與 n 無關，故 $\Sigma_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi r^2}$.

現在我們可以得到這一節主要結果的證明．

設 $\{\phi_\nu(z)\}$ 是 B 域的一個就範直交系．若數列 $\{a_\nu\}$ 適合條件

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2<\infty, \tag{21}$$

則級數

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\phi_\nu(z) \tag{22}$$

在 B 的每一閉的子域內均勻且絕對收斂，並且表示了在 $\mathfrak{L}^2$ 類內的一個具有富里埃係數 a_ν

$$a_\nu=J(f,\bar{\phi}_\nu) \tag{23}$$

的函數．若 $\{\phi_\nu(z)\}$ 是一閉系，每一函數 $f\in\mathfrak{L}^2$ 可記成(22)形式，而級數的係數表成(23)式，且此級數在 B 的每一閉子域內均勻且絕對收斂．

證．首先證級數(22)在 B 的每一閉子域 B' 內均勻且絕對收斂．子域 B' 內的點以 r 爲到 B 的邊界的正的最小距離．今欲證

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{n+m}|a_\nu\phi_\nu(z)|=0, \tag{24}$$

對 m 及對 B' 的 z 一致成立．由雪瓦茲不等式，我們有

$$\sum_{\nu=n}^{n+m}|a_\nu||\phi_\nu(z)|\leqslant\left[\left(\sum_{\nu=n}^{n+m}|a_\nu|^2\right)\left(\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(z)|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\pi r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}|a_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

用(21)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{n+m}|a_\nu|^2=0,$$

從而(24)得證． 由維爾斯脫拉斯(Weierstrass)定理知，$f(z)$為 B' 內的正則解析函數，並且因為 B' 是 B 的一個任意的閉子域，所以 $f(z)$也為在B中的正則解析函數．

現在我們來證明 $f(z)$屬於 $\mathfrak{L}^2(B)$．令

$$f_n(z)=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu(z).$$

在B的每一閉子域 B' 中，敍列$\{f_n(z)\}$均匀且絕對的收斂於$f(z)$．因此

$$J_{B'}(f)=\lim_{n\to\infty}J_{B'}(f_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}J_B(f_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|^2,$$

而且令B'趨向 B 時

$$J_B(f)\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2,$$

即 $f(z)\in\mathfrak{L}^2$．

此外，當 $n\geqslant\mu$ 時，我們有

$$|J(f,\bar\phi_\mu)-a_\mu|=\left|J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu,\ \bar\phi_\mu\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)J(\phi_\mu)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[J\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

若 $\overline{B}'\subset B$

$$J_{B'}\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)=\lim_{m\to\infty}J_{B'}\left(\sum_{\nu=1}^{m}a_\nu\phi_\nu-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}J_B\left(\sum_{\nu=1}^{m}a_\nu\phi_\nu-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\phi_\nu\right)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|a_\nu|^2.$$

令 B' 趨向 B，得到

$$|J(f,\bar\phi_\mu)-a_\mu|\leqslant\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|a_\nu|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

由於 n 僅限於滿足不等式 $n\geqslant\mu$，而取 n 變成無限大， 我們因此得

到

$$J(f, \bar{\phi}_\mu)=a_\mu.$$

現在討論一個已給的函數 $f\in\mathfrak{L}^2(B)$，且設 $\{\phi_\nu(z)\}$ 是一個閉系. 則由(15),當有

$$J_B(f)=\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^2, \qquad a_\nu=J_B(f, \bar{\phi}_\nu). \tag{25}$$

由前所證，級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\phi_\nu(z)$在 B 內的每一子域 B' 內均勻且絕對收斂,故表示一個解析函數. 留下來要證明的是這個函數恆等於 f. 爲了達到這個目的只要證明

$$\lim_{n\to\infty} J_B\left(f-\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\phi_\nu(z)\right)=0$$

就足够了. 亦即,級數(22)向函數 f 平均收斂. 但是此乃閉系定義及富里埃係數極小性質的必然後果. 故定理證畢.

3. 就範直交函數系的核

算式

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\phi_\nu(z)\,\overline{\phi_\nu(t)} \tag{26}$$

稱爲就範直交系 $\{\phi_\nu\}$ 的核. 對實變數的就範直交函數言,(26)式所示的級數往往發散[1), 但在我們所論情況下,且能容易地證明它恆收斂.

在任一閉子域 $B'\subset B$, 由級數(26)所定義的就範直交函數系 $\{\phi_\nu\}$的核,當 t 固定時對於 z 是絕對且均勻收斂;又 z 固定時對於 t 是絕對且均勻收斂. 此核是 z 及 $\bar{t}$ 的解析函數.

令 $z, t\in B'$, 並且令 t 固定. 則

$$\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(z)\,\overline{\phi_\nu(t)}|\leqslant\left[\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(z)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}<$$

$$<\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(z)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{\nu=n}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

1) 例如，$\sin nz$, $\cos nz$.

B' 域與 B 域間有一最小距離 r，因此由引理 1.2

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(z)|^2\leqslant\frac{1}{\pi r^2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2\leqslant\frac{1}{\pi r^2}.$$

因爲 t 固定，故得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2=0.$$

因此，用(27)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=n}^{n+m}|\phi_\nu(z)\overline{\phi_\nu(t)}|=0,$$

對 B' 中的 z 而言，是一致地成立． 此指出(26)在 B' 上一切點均絕對收斂，且當 t 固定時對 z 匀斂．由於對稱性，(26)當 z 固定時則對 t 匀斂． 因此由維爾斯脫拉斯定理，其和爲 z 及 $\bar{t}$ 的解析函數．上述結果已證畢．

例 (9)式的系中，我們有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(z)\overline{\phi_n(t)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi}\frac{z^{n-1}\bar{t}^{n-1}}{r^{2n}}=\frac{r^2}{\pi(r^2-z\bar{t})^2}. \tag{28}$$

(10)式系中，我們有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(z)\overline{\phi_n(t)}=-\frac{1}{2\pi z\bar{t}\log r}+\frac{1}{\pi z\bar{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{nz^n\bar{t}^n}{1-r^{2n}}, \tag{29}$$

Σ' 內略去 $n=0$.

藉助於橢圓函數，(29)可以寫成更清楚的形式． 維爾斯脫拉斯 $\wp$ 函數可展開爲

$$\wp(u)=-\frac{\eta_1}{\omega_1}+\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}\right)}-2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos\frac{n\pi u}{\omega_1},$$

此處 ω_1 及 ω_2 爲周期，$q=\exp\{i\pi\omega_2/\omega_1\}$ 且 $2\eta_1$ 爲維爾斯脫拉斯 ζ 函數對於周期 ω_1 言的增量．特別取 $\omega_1=\pi i$，$\omega_2=\log r$，經過適當處理後獲得

$$\wp\{\log z\}=-\frac{\eta_1}{\pi i}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{nz^n}{1-r^{2n}},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(z)\,\overline{\phi_n(t)} = \frac{1}{\pi z \bar{t}}\left[\mathfrak{p}\{\log z\bar{t}\} + \frac{\eta_1}{\pi i} - \frac{1}{2\log r}\right].$$

4. 閉 系

對於每一有界域存在着閉的就範直交函數系．我們可以造出一個特殊的就範直交系來證明這個存在定理，而這在某種意義下，可以看出與單位圓上的 z 的冪函數相類似．

我們的出發點是考慮如下的極值問題．考慮所有在 B 內任一固定點 t 上適合條件

$$g \in \mathfrak{L}^2,\ \ g^{(\nu)}(t)=0,\ \ \nu=0,1,\cdots,n-1,\ \ g^{(n)}(t)=1, \qquad (30)$$

而

$$g^{(0)}(t)=g(t), \qquad g^{(\nu)}(t)=\left.\frac{d^\nu g(z)}{dz^\nu}\right|_{z=t}, \qquad \nu \geqslant 1$$

的單值解析函數．以 $g_n(z)$ 表示使積分

$$J(g)=\iint_B |g(z)|^2\, d\omega. \qquad (31)$$

取極小值的函數．

當然存在函數適合(30)，如函數 $\frac{(z-t)^n}{n!}$ 就是． 設 A 是能適合(30)的 g 組成 $J(g)$ 的最大下界． 於是存在一函數列 $\{h_\nu\}$ 適合(30)而

$$\lim_{\nu\to\infty} J_B(h_\nu)=A.$$

由於積分 $J_B(h_\nu)$ 均勻有界． 故函數列 $\{h_\nu\}$ 組成一緊緻族[1)]．因此存在 $\{h_\nu\}$ 的子函數列 $\{h_{\nu_i}\}$ 及一函數 $g_n(z)$ 使

$$\lim_{i\to\infty} h_{\nu_i}(z)=g_n(z)$$

於 B 的每一閉子域一致成立．

---

1) 我們稱函數族(在 B 內)是緊緻的，若每一族中無限數列包有一子數列在 B 的每一子域內能勻斂．解析函數族 $\{f\}$ 當 $J(f)\leqslant M$ 時是緊緻族．因設 B' 是 B 的一閉子域，且令 r 表 B' 到 B 的界的最小距離．於是由§2第一引理可知 $z\in B'$ 時 $|f(z)|^2\leqslant\frac{M}{\pi r^2}$．今由在 B' 內均勻有界解析函數集緊緻性引出此緊緻性 [25, 169 頁]．緊緻族有時叫法族．可參看[3, 63 頁]; [8]; [16]; [6, 卷 III, 665 頁]．

對閉子域 $B'<B$, 有

$$J_{B'}(g_n)=\lim_{i\to\infty} J_{B'}(h_{\nu_i})\leqslant A.$$

因此 $J_B(g_n)\leqslant A$, 因而

$$J_B(g_n)=A.$$

顯然, g_n 適合(30), 故爲我們所提出變分問題的一個解. 因爲若

$$l\in\mathfrak{L}^2,\quad l^\nu(t)=0,\quad \nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n,$$

則

$$J(l,\ \bar{g}_n)=0. \tag{32}$$

事實上, 設 $J(l,\ \bar{g}_n)\neq 0$, 對於每一常數 c 函數 g_n+cl 均適合條件(30). 今取

$$c=-J(g_n,\ \bar{l})/J(l,\ \bar{l}).$$

略行計算得

$$J(g_n+cl)=A-|J(g_n,\ \bar{l})|^2/J(l,\ l)<A.$$

但此與 A 的定義相違背. 若 g_n^* 爲本題的另一解, 則有

$$\frac{d^\mu}{dz^\mu}(g_n(z)-g_n^*(z))|_{z=t}=0,\qquad \mu=0,\ \cdots,\ n.$$

由上述引出

$$J(g_n-g_n^*)=0\quad 且\ J(g_n-g_n^*,\ \bar{g}_n^*)=0.$$

因此

$$J(g_n-g_n^*)=0,\ 故\ g_n\equiv g_n^*.$$

考慮函數列 g_n, $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$. 由(32)他們組成直交系. 若我們寫

$$\phi_n(z)=\frac{g_{n-1}(z)}{(J(g_{n-1}))^{\frac{1}{2}}},\qquad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

我們得到一組就範直交系. 我們來證明這系是閉的. 令 $f(z)$ 是 $\mathfrak{L}^2$ 類內一已知函數, 且令 $a_\nu=J(f,\ \bar{\phi}_\nu)$, $\nu=1,\ 2,\ \cdots$. 由貝塞爾不等式及 §2 的主要結果, 級數

$$g(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\phi_\nu(z) \tag{33}$$

表示一正則解析函數. 爲了要證明 $\{\phi_\nu\}$ 集是閉的, 我們只需證 $f\equiv g$. 決定常數 $a_\nu^{(s)}$ 如下法使

$$\left.\frac{d^\mu f_s(z)}{dz^\mu}\right|_{z=t}=\left.\frac{d^\mu f(z)}{dz^\mu}\right|_{z=t}, \qquad \mu=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ s-1,$$

$$f_s=\sum_{\nu=1}^{s} a_\nu^{(s)}\phi_\nu \qquad s=1,\ 2,\ \cdots.$$

此事之所以可能由於含 s 未知數 $a_1^{(s)}$，…，$a_s^{(s)}$ 之綫性方程組之係數行列式非零的緣故．今證 $a_\nu^{(s)}=a_\nu$，事實上有

$$\frac{d^\mu}{dz^\mu}[f_s(z)-f(z)]_{z=t}=0, \qquad \mu=0,\ 1,\ \cdots,\ s-1,$$

及由(32)

$$J(f_s-f,\ \bar{\phi}_\nu)=0, \qquad \nu=1,\ \cdots,\ s.$$

由此得 $a_\nu=a_\nu^{(s)}$．因此有

$$\frac{d^\mu}{dz^\mu}\left[f(z)-\sum_{\nu=1}^{s}a_\nu\phi_\nu(z)\right]\Bigg|_{z=t}=0, \qquad \mu=0,\ \cdots,\ s-1,$$

所以，由於解析函數之勻斂級數可逐項作微商

$$\frac{d^\mu}{dz^\mu}[f(z)-g(z)]_{z=t}=0,$$

此乃對於一切 $\mu\geqslant 0$ 而言，因 f 及 g 是解析函數，$f\equiv g$．證畢．

前證定理並未導致我們來確切地算出就範直交函數系．因爲沒有(已知)明顯方法求出函數 g_n 使(31)積分取極小．在 B 爲單連通域的情況下，g_n 可藉函數 $w(z)$之助，$w(t)=0$，$w'(t)=1$，而使 B 共形映照到 w 平面內的一個圓上，其圓心在 $w=0$ 處．在此情况下有

$$g_n(z)=\frac{[w(z)]^n}{n!}w'(z). \tag{34}$$

欲證(34)我們用 §2 中已用過的方法．

今可驗證當 B 爲一單位圓且 $t=0$，則

$$g_n(z)=\frac{z^n}{n!}.$$

在一般情況下，鑒於 $\dfrac{w^n}{n!}$ 的極小性質可得

$$\iint_{|w|<1}\left|\frac{w^n}{n!}\right|^2 d\omega_w\leqslant\iint_{|w|<1}|g_n(z(w))z'(w)|^2\,d\omega_w,$$

此處 $z(w)$ 爲 $w(z)$ 的逆函數. 在上面不等式中更換變數,則得到

$$\iint_B \left|\frac{w(z)^n w'(z)}{n!}\right|^2 d\omega_z \leqslant \iint_B |g_n(z)|^2 d\omega_z. \qquad (35)$$

因爲已設 $g_n(z)$ 爲在就範直交化條件(30)下而使積分 $J_B(g_n)$ 取極小值,又因爲 $[w(z)]^n w'(z)/n!$ 適合此種條件, 故(35)中等式成立. 由於極值函數的唯一性,(34)證畢.

對已知 B 域中一個閉的就範直交系的實際造法可循下面方法作出. 設已知函數 $\psi_n(z)$, $n=1, 2, \cdots$, (不必設爲直交)對 $\mathfrak{L}^2$ 類言成一閉系; 亦即設每一函數 $f\in\mathfrak{L}^2$ 及對每一正數 ε 有一函數 ψ 其形式爲

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \psi_\nu(z),$$

使

$$J(f-\psi)<\varepsilon.$$

由於此系直交化(例如用格蘭姆-施密特直交化方法),我們可得一閉的直交系.

對於相當普遍的域,多項式,或多項式及某些簡單的有理函數組成一閉系. 此可利用重要的關於解析函數的逼近理論證明之[1]. 其中之一即**龍格定理**[2].

設 B 爲有界域而有連接度 n, 其邊界爲約當 (Jordan) 曲綫 $b_1 \cdots, b_n$, 而 b_1 爲外部邊界, 且設 $a_2, \cdots, a_n$ 爲在曲綫 $b_2, \cdots, b_n$ 內部任取的固定點(因此在 B 域之外);於是對於 B 域每一子域 B' 且對每一正數 ε 必存在一函數 Q 形

$$Q(z)=\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu z^\nu+\sum_{i=2}^{n}\sum_{\mu=0}^{m_i}\frac{l_{i\mu}}{(z-a_i)^\mu},$$

使得當 f 在 B 中解析且單值,於是在 B' 中有

$$|Q(z)-f(z)|<\varepsilon.$$

當域是單連的情况下;則函數 $Q(z)$ 化成多項式.

必須注意有單連通域,它使多項式集爲不封閉者. 例如取 B

1) 參閱華爾許 (Walsh).

2) [1, 卷 I, 297 頁]; [27. 10 頁].

爲一單位圓，而沿正軸方向有一裂紋． 系(9)在單位圓中直交，且亦在B中直交，這是由於裂紋不影響面積積分的值的緣故． 若此系對 B 是閉的，則每一函數 $f \in \mathfrak{L}^2$ 在 B 內正則可表示爲一屬於系(9)的函數之級數，亦即，表成冪級數．換句話說，我們將獲得每一函數在B內正則且屬於類 $\mathfrak{L}^2$ 者亦正則於單位圓之謬誤結論．

一單連通域B中使多項式集在B內封閉之實在所需條件於法里耳(Farrell)之論著中已寫出，在參考書中也已指出．

5. 雙直交函數

以前所考慮的複直交函數是在一個域 B 上；現在我們拓廣這個概念，引進一個閉的函數系，它不僅在 B 域上直交，而且在 B 內的 G 域上也是如此．這個可能性至少見於一些特例事實，例如 z 的非負整數方冪在任何一對圓 $|z|<r_1$, $|z|<r_2$, $r_1<r_2$ 上直交．同樣，兩同心圓環 $\rho_1<|z|<r_1$, $\rho_2<|z|<r_2$, $\rho_1<\rho_2<r_2<r_1$，一切 z 正數，負數或零次方冪也可以作爲雙直交系的例． 今欲證當域 G 其閉包爲含於有界域B內時此種系一般存在，並且我們將給其應用．

設B爲 z 平面上的有界域且G域的閉包含於B內．在此情況下，B內存在一解析且單值函數系 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 對B 封閉且在 B 及G 上均爲直交，亦即適合

$$J_B(\varphi_\nu, \overline{\varphi}_\mu)=k_\nu\delta_{\nu\mu}, \qquad k_\nu\geq 1, \tag{36}$$

$$J_G(\varphi_\nu, \overline{\varphi}_\mu)=\delta_{\nu\mu}. \tag{37}$$

證明基於考慮適當的極值問題．在一切 B 內單值正則函數 $f(z)$中在就範化條件

$$J_G(f)=1 \tag{38}$$

之下，我們找尋一個函數使其能致積分

$$\iint_B |f|^2\, d\omega = J_B(f)$$

取極小值．

我們固定此問題的一解爲 $\varphi_1(z)$． 若已求出 $\varphi_1(z)$, $\cdots$, $\varphi_{n-1}(z)$，用 $\varphi_n(z)$表任一正則(單值)函數在下述條件

$$J_G(f, \overline{\varphi}_1)=J_G(f, \overline{\varphi}_2)=\cdots=J_G(f, \overline{\varphi}_{n-1})=0, \quad J_G(f)=1 \quad (39)$$

下使 $J_B(f)$ 取極小值．令此極小值爲 k_n．因爲我們可以限制在這個過程中的第 n 次步驟中($n=1, 2, \cdots,$)，所欲選函數滿足

$$J_B(f)\leqslant A_n,$$

而 A_n 爲適當大的實數，由於此族是緊緻的緣故，極小化函數是保證存在的． 顯然存在多項式滿足就範化條件，故所選函數爲非空集．

系 $\{\varphi_\nu\}$ 由定義知其在 G 上直交．欲證在 B 上有直交性，可討論輔助函數

$$\psi=a_1\varphi_\nu+a_2\varphi_\mu, \qquad \mu>\nu,$$

而

$$|a_1|^2+|a_2|^2=1.$$

我們有

$$J_G(\psi, \overline{\varphi}_1)=J_G(\psi, \overline{\varphi}_2)=\cdots=J_G(\psi, \overline{\varphi}_{\nu-1})=0,$$
$$J_G(\psi)=|a_1|^2+|a_2|^2=1,$$

因此得

$$J_B(\psi)\geqslant k_\nu. \tag{40}$$

取

$$A=A_1+iA_2=J_B(\varphi_\nu, \overline{\varphi}_\mu),$$

得

$$J_B(\psi)=|a_1|^2 k_\nu+|a_2|^2 k_\mu+a_1\bar{a}_2A+\bar{a}_1a_2\overline{A}=$$
$$=k_\nu+(k_\mu-k_\nu)|a_2|^2+a_1\bar{a}_2A+\bar{a}_1a_2\overline{A}.$$

令 a_1, a_2 爲實數，且在 $a_2=0$ 處展開 a_1 爲 a_2 的函數，故得

$$a_1=\pm(1-a_2^2)^{\frac{1}{2}}=\pm\left\{1-\frac{1}{2}a_2^2+\cdots\right\}.$$

得公式

$$J_B(\psi)=k_\nu\pm 2a_2A_1+a_2^2(k_\mu-k_\nu)\mp a_2^3A_1+\cdots,$$

若 $A_1\neq 0$，可取 a_2 足够小使

$$J_B(\psi)<k_\nu,$$

而與 (40) 相背，因此 $A_1=0$；同理，令 $a_1=\pm i(1-a_2^2)^{\frac{1}{2}}$，可得 $A_2=0$，所以

$$J_B(\varphi_\nu, \overline{\varphi}_\mu)=0, \qquad \nu\neq\mu.$$

將原來的極值問題中(38)及(39)式的B和G交換並把極小改爲極大，我們得到另一極值問題，系$\{\varphi_\nu\}$亦爲此問題之解。

讓$\{\varphi_\nu\}$是這樣一個函數系，使方程組

$$J_B(f,\psi_1)=J_B(f,\psi_2)=\cdots=J_B(f,\psi_{n-1})=0,$$

$$J_B(f)=1,\qquad J_G(f)=\text{極大值}$$

以ψ_n爲唯一的解．應用上節的理由可以得$J_G(\psi_\nu,\psi_\mu)=0,\nu\neq\mu$．此種直交關係及$\varphi_\nu$的唯一性立致我們的論斷證實．

系$\{\varphi_\nu\}$爲閉的，因爲函數類$f(z)$在B內正則；並且$J_B(f)<\infty$．設此系不閉，則對某$f\in\mathfrak{L}^2(B)$有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}k_\nu|a_\nu|^2<J_B(f),$$

此處$a_\nu=\left(\frac{1}{k_\nu}\right)J_B(f,\varphi_\nu)$．於是對有一正數$A$使

$$E_n=J_B(f)-\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu|a_\nu|^2,\qquad \frac{1}{E_n}<A<\infty.$$

函數

$$\theta_n(z)=\frac{1}{(E_n)^{\frac{1}{2}}}\left\{f(z)-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\varphi_\nu(z)\right\}$$

適合就範化條件

$$J_B\left(\theta_n,\frac{\varphi_1}{(k_1)^{\frac{1}{2}}}\right)=J_B\left(\theta_n,\frac{\varphi_2}{(k_2)^{\frac{1}{2}}}\right)=\cdots=J_B\left(\theta_n,\frac{\varphi_n}{(k_n)^{\frac{1}{2}}}\right)=0,$$

$$J_B(\theta_n)=1,\tag{41}$$

故有

$$J_G(\theta_n)\leq\frac{1}{k_{n+1}}.\tag{42}$$

這是由於以前的觀察，在條件(41)之下，函數$\frac{\varphi_{n+1}}{(k_{n+1})^{\frac{1}{2}}}$是使$J_G(\theta_n)$取極大值。今我們已經假設$\bar{G}\subset B$，因此，如§2所示

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\varphi_\nu(z)|^2}{k_\nu}$$

均勻收斂，故在G中有界．因之得到

$$\iint_G \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\varphi_\nu(z)|^2}{k_\nu} d\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{k_\nu} \iint_G |\varphi_\nu(z)|^2 d\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{k_\nu}$$

收斂，而當 $\nu \to \infty$ 時 $\frac{1}{k_\nu} \to 0$. 因此由(42)

$$\lim_{n\to\infty} J_G(\theta_n) = 0;$$

但由於 $J_B(\theta_n) = 1$，$\{\theta_n(z)\}$ 爲 B 內的一個法族，得出在 G 內 $\theta_n(z) \to 0$. 從而在 B 內亦如此；事實上，在 B 的每一閉子域內均勻收斂. 由此得出與假設

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu |a_\nu|^2 < J_B(f)$$

相矛盾(最後一步之詳證參閱 § 2 內李滋-費葉定理).

一般情況下，系 $\{\varphi_\nu\}$ 在 G 內不封閉. 例如 B 是一單位圓而 G 是在 B 中的一個同心環 $r < |z| < 1$，此處之系由含 z 的非負冪乘以適當的常數組成的. 此系顯然在 B 內封閉但在 G 內則否. 當 G 爲單連通域而爲約當曲綫所圍，系 $\{\varphi_\nu\}$ 是閉的[1]，因爲如 § 4 內所述，對任一 $\varepsilon > 0$ 及 $f \in \mathfrak{L}^2(G)$ 有一對應多項式 p_n 使

$$J_G(f - p_n) < \varepsilon;$$

但因爲 $p_n \in \mathfrak{L}^2(B)$，故有 φ_ν 的綫性組合

$$\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \varphi_\nu(z),$$

使

$$J_G\Big(p_n - \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \varphi_\nu\Big) \leqslant J_B\Big(p_n - \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \varphi_\nu\Big) < \varepsilon.$$

因此

$$J_G\Big(f - \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \varphi_\nu\Big) \leqslant J_G(f - p_n) + 2\Big(J_G(f - p_n) J_G\Big(p_n - \\ - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} + J_G\Big(p_n - \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu \varphi_\nu\Big) < 4\varepsilon. \qquad (43)$$

1) 事實上，$\{\varphi_\nu\}$ 集是在 G 內閉的，只要 B 及 G 各爲有限個不相交的約當曲綫所圍成，且 G 並不把在 B 中而不在 G 中的點與邊界相隔離，在此條件下，在 G 的閉包中，每一在 G 外有極的有理函數都可以用在 B 外有極的有理函數逼近它.

由於對於平均平方誤差而言，$f(z)$ 的最佳近似值相當於 $a_\nu = J_G(f, \bar{\varphi}_\nu)$ 時取得；由 (43) 得到系 $\{\varphi_\nu\}$ 爲封閉的，並且級數 $\sum_{\nu=1}^{\infty} J_G(f, \bar{\varphi}_\nu)\varphi_\nu(z)$ 當 $z \in G$ 時向 $f(z)$ 收斂.

6. 一個解析延拓方法

設 G 爲圓 $|z|<r$，$\bar{G} \subset B$，且設

$$d_n = \frac{1}{\left[\iint_G |z|^{2n}\, d\omega\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r^{n+1}}\left(\frac{n+1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n=0,\ 1,\ \cdots,$$

將由(36)及(37)式定義的函數 $\varphi_\nu(z)$ 於原點處展開成冪級數

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{n=0}^{m} c_{\nu_n} d_n z^n.$$

因 $\{z^n\}$ 在 G 上直交，故得關係式

$$\iint_G \varphi_\nu \bar{\varphi}_\mu\, d\omega = \iint_G \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{\nu n} \bar{c}_{\mu m} d_n \bar{d}_m z^n \bar{z}^m\, d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\nu n} \bar{c}_{\mu n} = \delta_{\nu\mu},$$

即無限矩陣 $(c_{\nu\mu})^{\infty\times\infty}$ 爲直交的(25 頁).

今證下述結果.

設 B 爲任一有界域而含有 $|z|<r$ 之閉包 $\bar{G}$，則存在着含有無限變數的海密頓形(Hermitian form)的敍列

$$H_n(\alpha_\nu, \bar{\alpha}_\mu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\nu\mu}^{(n)} \alpha_\nu \bar{\alpha}_\mu,$$

而有下述性質：設

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

在 G 內正則；則若 $f(z)$ 在 B 內正則且 $J_B(f)<\infty$，

$$\lim_{n\to\infty} H_n\left(\frac{b_\nu}{d_\nu}, \frac{\bar{b}_\mu}{\bar{d}_\mu}\right) \tag{44}$$

存在. 反之若(44) [用(48)定義的 $A_{\nu\mu}$] 存在，$f(z)$ 可連續解析延拓到 B，且不等式

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{r(z)} \left(\lim_{n\to\infty} H_n\left(\frac{b_\nu}{d_\nu}, \frac{\bar{b}_\mu}{\bar{d}_\mu}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{45}$$

成立，其中 $r(z)$ 爲 z 到達 E 的邊界距離.

證. 設 $f(z)$ 在 B 內正則且 $J_B(f)<\infty$, 則在 B 中 $f(z)$ 可展開成級數

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{J_B(f,\bar{\varphi}_\nu)\varphi_\nu(z)}{k_\nu};$$

在 G 中可以展開成級數

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}J_G(f,\bar{\varphi}_\nu)\varphi_\nu(z).$$

因爲表示法唯一，由(36)

$$J_B(f,\bar{\varphi}_\nu)=k_\nu J_G(f,\bar{\varphi}_\nu).$$

對於 $f(z)$ 及 $\varphi_\nu(z)$ 採用冪級數，有

$$J_B(f,\bar{\varphi}_\nu)=k_\nu\iint_G\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b_nd_n}{d_n}z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\bar{c}_{\nu m}d_m\bar{z}^m\right)d\omega=k_\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n\bar{c}_{\nu n}}{d_n}.\tag{46}$$

因爲 $J_B(f)<\infty$, 得

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|J_B(f,\bar{\varphi}_\nu)|^2}{k_\nu}<\infty,$$

即

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{|J_B(f,\bar{\varphi}_\nu)|^2}{k_\nu}\tag{47}$$

存在. 以(46)代入(47), 立得極限

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=1}^{N}k_\nu\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n\bar{c}_{\nu n}}{d_n}\right|^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_n}{d_n}\frac{\bar{b}_m}{\bar{d}_m}\sum_{\nu=1}^{N}k_\nu\bar{c}_{\nu n}c_{\nu m}$$

存在. 取

$$\sum_{\nu=1}^{N}k_\nu\bar{c}_{\nu n}c_{\nu m}=A_{nm}^{(N)},\ H_n\left(\frac{b_\nu}{d_\nu},\ \frac{\bar{b}_\mu}{\bar{d}_\mu}\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}A_{\nu\mu}^{(n)}\frac{b_\nu}{d_\nu}\frac{\bar{b}_\mu}{\bar{d}_\mu},\tag{48}$$

得定理第一部分.

第二部分中當 $f(z)$ 正則於 G 內時，得

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}J_G(f,\bar{\varphi}_\nu)(k_\nu)^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_\nu(z)}{(k_\nu)^{\frac{1}{2}}}.\tag{49}$$

由雪瓦茲不等式，得

$$\left|\sum_{\nu=M}^{N} J_G(f,\bar{\varphi}_\nu)(k_\nu)^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi_\nu(z)}{(k_\nu)^{\frac{1}{2}}}\right| \leqslant \left[\sum_{\nu=M}^{N}\frac{|\varphi_\nu(z)|^2}{k_\nu}\sum_{\nu=M}^{N} k_\nu|J_G(f,\bar{\varphi}_\nu)|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

右端根式中第一因子由B域上系$\{\varphi_\nu\}$的核函數中得出，而因此它在B的每一閉子域中均匀有界．事實上由§2

$$\left(\sum_{\nu=M}^{N}\frac{|\varphi_\nu(z)|^2}{k_\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{r(z)}.$$

由(46)及(48)第二因子取$M=1$時爲

$$\left(\sum_{\nu=1}^{N} k_\nu|J_G(f,\bar{\varphi}_\nu)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = H_N\left(\frac{b_\nu}{a_\nu},\ \frac{\bar{b}_\mu}{\bar{a}_\mu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

由假設知其收斂．因此可結論級數(49)在B的每一子域内匀斂，故$f(z)$在B内正則且滿足(45)式．

參考資料[1)]

Bergman 1, 2, 6, 13, 23, 25.
Bergman 及 Schiffer 4, 5, 6.
Biberbach 1.
Bochner 1.
Hammerstein.
Farrell.
Julia 1.
Kaczmarz 及 Steinhaus 11
Kufareff.
Szegö 1.
Walsh 27, I, VI 二章.
Walsh 及 Nilson.
Zarankiewicz 1, 2.

1) 在每一章的末幅有論文參考書，其中可獲得本節有關的補充材料，全部參考書列在本書末的參考文獻中．

II. 核函數及相關的極小問題

1. 核 函 數

若 B 爲一有界域且設 $\{\phi_\nu(z)\}$ 爲 B 內閉的就範直交函數系．系 $\{\phi_\nu\}$ 的核函數被定義爲

$$K(z, \bar{t})=\sum_{\nu=1}^{\infty} \phi_\nu(z)\, \overline{\phi_\nu(t)}.$$

雖然這個定義外表上是依賴於系 $\{\phi_\nu(z)\}$，其實核函數 $K(z, \bar{t})$ 完全由域 B 所決定．今欲給此結果以二種證明．

考慮下面一極小問題：定一函數 $f(z)$ 旣須在 B 內正則而在 B 內一定點 t 上有 $f(t)=1$，並且使積分

$$\iint_B |f(z)|^2\, d\omega \tag{1}$$

爲極小． 若此題有一解則此最小積分值可記爲 $\lambda_B^1(t)$，其值完全取決於域及點 t；同樣極小函數也是完全取決於域及點 t，如果此函數是唯一存在的話．

設 $f(z)$ 在 $\mathfrak{L}^2$ 內，且設 $\{\phi_\nu\}$ 爲 B 內一封閉的就範直交系． 由 I, § 2 中的定理 $f(z)$ 可記成形式

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \phi_\nu(z), \qquad a_\nu=J(f, \bar{\phi}_\nu).$$

我們記

$$a_\nu=\frac{\overline{\phi_\nu(t)}+A_\nu}{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\phi_\nu(t)|^2}$$

及

$$f(z)=\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} (\overline{\phi_\nu(t)}+A_\nu)\phi_\nu(z)}{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\phi_\nu(t)|^2}.$$

條件 $f(t)=1$ 將滿足若

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \phi_\nu(t)=0.$$

由巴塞佛爾恆等式得

$$J(f)=\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\overline{\phi_\nu(t)}+A_\nu\right|^2}{\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2\right]^2}=$$

$$=\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu\phi_\nu(t)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{A_\nu\phi_\nu(t)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}|A_\nu|^2}{\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2\right]^2}=$$

$$=\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}|A_\nu|^2}{\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2\right]^2}.$$

此式之極小值顯然可達到當且僅當 $A_\nu=0,\ \nu=1, 2, \cdots$. 因此存在唯一的極小函數即[1)]

$$f(z)=M_B^{(1)}(z, t)=\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{\phi_\nu(t)}\,\phi_\nu(\bar{t})}{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2}=\frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})}, \tag{2}$$

在條件 $f(t)=1$ 下積分式(1)的極小值爲

$$\lambda_B^1(t)=\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\phi_\nu(t)|^2}=\frac{1}{K(t,\bar{t})}. \tag{3}$$

公式(2)及(3)指出核函數僅依賴於其域. 此結果亦可由下面定理導出之.

若 B 爲有界域, 而 $K(z, \bar{t})$ 爲閉的就範直交系 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 的核函數, 且 $f(z)$ 爲屬於 $\mathfrak{L}^2(B)$ 內任一函數, 則對 B 內任一 z 有

---

1) 在本章及後面各章 (除去第 X 章), $z, t, \cdots$ 既表示複變數 $x+iy, u+iv, \cdots$; 又表示矢量 $(x, y), (u, v), \cdots$. 這在書中均明白指出.

$$f(z)=\iint_B K(z,\bar{t})f(t)\,d\omega. \tag{4}$$

證. 由第 I 章(22)式有

$$\iint_B K(z,\bar{t})f(t)\,d\omega=\iint_B\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\phi_\nu(t)\right]\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\phi_\nu(z)\,\overline{\phi_\nu(t)}\right]d\omega=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\phi_\nu(z)=f(z),$$

此處

$$a_\nu=J(f,\bar{\phi}_\nu).$$

由恆等式(4)所示性質看作對於 $\mathfrak{L}^2$ 類的核函數的**再生性質**.

欲證核函數的唯一性, 可用下法: 在 B 內二閉的就範直交系作出的核函數各爲 $K(z,t)$ 及 $K^*(z,\bar{t})$. I, §2 的定理對 K 及 K^* 二者均成立. 因此注意到 $K(z,\bar{\zeta})=\overline{K(\zeta,\bar{z})}$, 當有

$$K(z,\bar{t})=\iint K^*(z,\bar{\zeta})K(\zeta,\bar{t})\,d\omega_\zeta=\iint\overline{K(t,\bar{\zeta})K^*(\zeta,\bar{z})}d\omega_\zeta=$$

$$=\overline{\iint K(t,\bar{\zeta})\,K^*(\zeta,\bar{z})\,d\omega_\zeta}=\overline{K^*(t,\bar{z})}=K^*(z,\bar{t}).$$

$K(z,\bar{t})$ 被稱爲 $\mathfrak{L}^2(B)$ 類的核函數, 或簡稱爲 B 的核函數. 作爲恆等式(4)的添加結果我們注意下面的推論, 當然亦可由 $\lambda_B^1(t)$ 值的知識中直接導出.

若 B 爲有界域, $K(z,\bar{t})$ 是 B 的核函數及 $f(z)$ 是 $\mathfrak{L}^2(B)$ 內任一函數; 則

$$|f(z)|^2\leqslant K(z,\bar{z})\iint_B|f(t)|^2\,d\omega_t.$$

證. 由(4)

$$f(z)=\iint_B K(z,\bar{t})\,f(t)\,d\omega.$$

用雪瓦茲不等式, 有

$$|f(z)|^2\leqslant\iint_B|K(z,\bar{t})|^2\,d\omega_t\iint_B|f(t)|^2\,d\omega_t.$$

但是

$$\iint_B|K(z,\bar{t})|^2\,d\omega_t=\iint_B K(z,t)\,\overline{K(z,\bar{t})}\,d\omega_t=$$

$$=\iint_B K(z,\bar{t})\,K(t,\bar{z})d\omega_t=K(z,\bar{z}).$$

若B為一單連通域，考慮一切在B內定義且滿足條件

$$f(t)=0,\quad f'(t)=1,\quad t\in B$$

的單值解析函數，每一如此函數可使B映照到含原點的域D上。當然，D亦可為多葉者，D的面積以積分

$$J(f')=\iint_B |f'(z)|^2\,d\omega$$

表出之。很明顯的[1]，極小面積是D，它以原點為圓心的圓域所得到的。函數$f(z)=w(z,t)$將B映照到將t變換成原點的圓上。因此映照函數可表成下式

$$w(z,t)=\int_t^z \frac{K_B(\zeta,\bar{t})}{K_B(t,\bar{t})}d\zeta.$$

此圓面積為

$$\lambda_B^1(t)=K_B(t,\bar{t})^{-1}.$$

故直交函數的理論指出一個關於在單連通域情況下的映照函數的計算方法。

註．一般講，本書內為了方便計，設B域是單葉的，大多數方法亦可應用於研究黎曼曲面R及其子域上。如較近指出[2]在每一曲面R上（除了星形單葉而具有零界者）存在函數φ使

$$\iint_R |\varphi'|^2\,dx\,dy<\infty.$$

2. 一般極小問題

在§1內我們利用極小問題定義了一核函數。現在考慮某些類似的極小問題。我們欲求函數$f(z)$在B域內一定點t處滿足某些條件，且使積分$J_B(f)$取極小值。此種極小函數及對應的積分$J(f)$的極小值可以用核函數表示出來。

為方便計[3]，今用下面符號稱為$(n+1)\times(n+1)$矩陣：

$$(a_{kl})^{n\times n}\equiv\left\|\begin{matrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n}\\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right\|.$$

1) [1].

2) 見 Sario 1,2.

3) 這個比較複雜的記號採用了由於在 IX 章中有用.

時常爲便利計我們考慮由$(a_{kl})^{n\times n}$內抽出一行的矩陣；因此記

$$(a_{kl})_r^{n\times n}\equiv\left\|\begin{matrix} a_{00} & \cdots & a_{0r-1} & a_{0r+1} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & \cdots & a_{1r-1} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n0} & \cdots & a_{nr-1} & a_{nr+1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

注意矩陣內元素a_{kl}的k表行數和l表列數．今用習慣上易識符號列及行矩陣，必須指出k,l表流動指標而不是固定的指標．我們記

$$(a_{kr})^{n\downarrow}\equiv\left\|\begin{matrix} a_{0r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nr} \end{matrix}\right\|,\qquad (a_{rk})^{n\downarrow}\equiv\left\|\begin{matrix} a_{r0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{rn} \end{matrix}\right\|,$$

$$(a_{lr})^{n\rightarrow}\equiv\|a_{0r}\cdots a_{nr}\|\qquad (a_{rl})^{n\rightarrow}\equiv\|a_{r0}\cdots a_{rn}\|.$$

有時須要由已知矩陣造行列式，即行列式

$$|(a_{kl})^{n\times n}|=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & (X_l)^{n\rightarrow} \\ (X_k)^{n\downarrow} & (a_{lk})^{n\times n} \end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix} 0 & X_0 & X_1 & \cdots & X_n \\ X_0 & a_{00} & a_{10} & \cdots & a_{n0} \\ X_1 & a_{01} & a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ X_n & a_{0n} & a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如將來可見所求$(n+1)$個未知量的$(n+1)$個方程的解

$$\sum_{l=0}^{n} a_{kl}X_l=b_k\qquad k=0,\ \cdots,\ n.$$

當

$$|(a_{kl})^{n\times n}|\neq 0,$$

我們得

$$X_r=(-1)^r\frac{|(b_k)^{n\downarrow}(a_{kl})_r^{n\times n}|}{|(a_{kl})^{n\times n}|}.$$

爲便利計記

$$K_{ij}(x,\ \bar{y})=\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i\partial \bar{t}^j}K(z,\ \bar{t})\Big|_{z=x,\ \bar{t}=\bar{y}}.$$

今證下述定理:

在 $\mathfrak{L}^2(B)$內有一函數 $h(z)$, 它在 B 內一定點 t 處滿足條件

$$h^{(\nu)}(t)=X_\nu,\qquad \nu=0,\ \cdots,\ n; \tag{5}$$

其中 $X_0,\ \cdots,\ X_n$ 爲已知複數並且

$$h^{(\nu)}(t)=\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}h(z)\Big|_{z=t},$$

而且使積分

$$J(h)=\iint|h(z)|^2\,d\omega \tag{6}$$

取極小值. 若 $M_B^{X_0,\cdots,X_n}(z,t)$爲適合(5)並且使(6)取極小值的函數且設 $\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)$是(6)式的極小值, 則

$$M_B^{X_0,\cdots,X_n}(z,\ t)=-\frac{\begin{vmatrix}0 & K_{0,l}[z,\bar{t}]^{n\to}\\ (X_k)^{n\downarrow} & (K_{kl}[t,\bar{t}])^{n\times n}\end{vmatrix}}{|(K_{kl}[t,\ \bar{t}])^{n\times n}|}, \tag{7}$$

及

$$\lambda_B{}^{X_0,\cdots,X_n}(t)=-\frac{\begin{vmatrix}0 & (\bar{X}_l)^{n\to}\\ (X_k)^{n\downarrow} & (K_{kl}[t,\bar{t}])^{n\times n}\end{vmatrix}}{|K_{kl}[t,\ \bar{t}]^{n\times n}}.$$

證. 給一充分大的實數 A, 我們可以約束本題內函數類 h 滿足條件

$$J(h)\leqslant A<\infty.$$

故有一緊緻族, 且存在一函數 $h(z)$能使 $J(h)$得極小值. 若$\{\phi_\nu(z)\}$爲 B 上的一閉的就範直交系, $h(z)$能够表成

$$h(z)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu\phi_\mu(z),\quad A_\mu=J(h,\ \bar{\phi}_\mu).$$

由巴塞佛爾恆等式, 有

$$J(h)=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu\bar{A}_\mu. \tag{8}$$

條件(5)可以寫成形式

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \phi_\mu^{(\nu)}(t) = X_\nu, \qquad \nu=0, \cdots, n,$$
$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \overline{A}_\mu \overline{\phi_\mu^{(\nu)}}(t) = \overline{X}_\nu, \qquad \nu=0, \cdots, n. \tag{9}$$

爲了使(8)式取極小值,我們可在輔助條件下用求極小值的著名法則. 令 σ_ν 及 $\bar{\sigma}_\nu$ $(\nu=0, \cdots, n)$ 爲待定常數因子且令下式

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \overline{A}_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu \left\{\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \phi_\mu^{(\nu)}(t) - X_\nu\right\} -$$
$$-\sum_{\nu=0}^{n} \bar{\sigma}_\nu \left\{\sum_{\mu=1}^{\infty} \overline{A}_\mu \overline{\phi_\mu^{(\nu)}}(t) - \overline{X}_\nu\right\}$$

對每一變數 A_μ, $\overline{A}_\mu$ $(\mu=1, 2, \cdots)$ 的微商等於零. 本題內級數皆絕對收斂. 故我們的法則易知爲合理的. 故得

$$A_\mu = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\sigma_\nu \phi_\mu^{(\nu)}(t)},$$
$$\overline{A}_\mu = \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu \phi_\mu^{(\nu)}(t). \tag{10}$$

代入(9)式,得

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \bar{\sigma}_\nu \overline{\phi_\mu^{(\nu)}(t)} \phi_\mu^{(s)}(t) = X_s, \qquad s=0, \cdots, n,$$

或

$$\sum_{\nu=0}^{n} \bar{\sigma}_\nu \sum_{\mu=1}^{\infty} \overline{\phi_\mu^{(\nu)}(t)} \phi_\mu^{(s)}(t) = X_s, \qquad s=0, \cdots, n;$$

最後得

$$\sum_{\nu=0}^{n} \bar{\sigma}_\nu K_{s\nu}(t, \bar{t}) = X_s, \qquad s=0, \cdots, n.$$

因此

$$\bar{\sigma}_\nu = \frac{(-1)^\nu |(X_k)^{n\downarrow}(K_{kl}[t, \bar{t}])_\nu^{n\times n}|}{|(K_{kl}[t, \bar{t}])^{n\times n}|},$$
$$\sigma_\nu = \frac{(-1)^\nu |(\overline{X}_k)^{n\downarrow}(K_{lk}[t, \bar{t}]_\nu)^{n\times n}|}{|(K_{lk}[t, \bar{t}])^{n\times n}|}. \tag{11}$$

今可計算以 σ_ν 爲項表出的 A_μ, 因此可獲得所冀求的算式

$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)$ 及 $M_B^{X_0,\cdots,X_n}(z, t)$. 此計算工作留給讀者自己進行[1].

此定理另一形式可藉助於海密頓形式

$$H(x, x)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu\mu}x_\nu\bar{x}_\mu, \qquad a_{\nu\mu}=\bar{a}_{\mu\nu} \tag{12}$$

得出. $H(x,x)$的值恆為實數,設當 $\Sigma_{\nu=0}^{n}|x_\nu|>0$ 時, $H(x,x)>0$, 此形式稱為**定正**。每一海密頓形式可記成諸綫性式的絕對值的平方和的綫性組合[2]. 特別可表示 $H(x, x)$成形式

$$H(x, x)=\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu|L_\nu(x_0, \cdots, x_\nu)|^2, \quad L_\nu=\sum_{\mu=0}^{\nu} b_{\nu\mu}x_\mu; \tag{13}$$

此處 σ_ν 為實數. 若形式為定正, 所有的 σ_ν 均為正數; 我們稱(13)為形式(12)的雅可比 (Jacobi) 旣約式. 這可由(12)式唯一確定之.

今我們計算此"最後"綫性式 L_n. $H(x, x)$可記成形式

$$\begin{aligned}H(x, x)&=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu\mu}\bar{x}_\nu\bar{x}_\mu=\\&=a_{nn}\,x_n\bar{x}_n+a_{n,n-1}\,x_n\bar{x}_{n-1}+a_{n-1,n}\,\bar{x}_n x_{n-1}+\\&\quad+\cdots+a_{n0}x_n\bar{x}_0+a_{0n}\bar{x}_n x_0+\cdots=\\&=\frac{1}{a_{nn}}|a_{0n}x_0+a_{1n}x_1+\cdots+a_{nn}x_n|^2+\cdots.\end{aligned} \tag{14}$$

因此

$$\sigma_n|L_n(x_0,\cdots, x_n)|^2=\frac{1}{a_{nn}}|a_{0n}x_0+a_{1n}x_1+\cdots+a_{nn}x_n|^2. \tag{15}$$

形如

$$H(x, y)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu\mu}x_\nu\bar{y}_\mu \qquad a_{\nu\mu}=\overline{a_{\mu\nu}} \tag{16}$$

的式子稱為海密頓對 $x_0, \cdots, x_n$ 及 $y_0, \cdots, y_n$ 的雙綫性式; 且亦可表示成 $x_0, \cdots, x_n$ 及 $y_0, \cdots, y_n$ 的綫性式乘積的綫性組合. 特別有

$$H(x, y)=\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu L_\nu(x_0, \cdots, x_\nu)\overline{L_\nu(y_0, \cdots, y_\nu)} \tag{17}$$

1) 詳情參閱 Bergman 13, 94 及以下。

2) 見[4, 卷 I, 第 I 章].

(海密頓的雙綫性式的雅可比既約式).

今進行證明下列恆等式:

$$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{(\nu-1)\times(\nu-1)}|}{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{\nu\times\nu}|}\cdot\left|\frac{|(X_k)^{\nu\downarrow}(K_{kl}[t,\bar{t}])_{\nu}^{\nu\times\nu}|}{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{(\nu-1)\times(\nu-1)}|}\right|^2. \tag{18}$$

當 $n=0$ 我們置此行列式退縮爲 1, 上式顯然眞確. 今設其對某 $n-1$ 已眞確則可證對 n 亦眞確. 今

$$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)=-\frac{\begin{vmatrix}0 & (\overline{X}_l)^{n\to}\\ (X_k)^{n\downarrow} & (K_{kl}[t,\bar{t}])^{n\times n}\end{vmatrix}}{|K_{kl}[t,\bar{t}]^{n\times n}|} \tag{19}$$

可展開成形式

$$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)=-\frac{1}{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{n\times n}|}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n}A_{\nu\mu}X_\nu\overline{X}_\mu, \tag{20}$$

而 $A_{\nu\mu}$ 爲行列式

$$A_{\nu\mu}=(-1)^{\nu+\mu-1}\begin{vmatrix}K_{0,0}(t,\bar{t})\cdots K_{0,\mu-1}(t,\bar{t}) & K_{0\mu+1}(t,\bar{t})\cdots K_{0,n}(t,\bar{t})\\ \vdots\qquad\qquad\vdots & \vdots\qquad\qquad\vdots\\ K_{\nu-1,0}(t,\bar{t})\cdots K_{\nu-1,\mu-1}(t,\bar{t}) & K_{\nu-1,\mu+1}(t,\bar{t})\cdots K_{\nu-1,n}(t,\bar{t})\\ K_{\nu+1,0}(t,\bar{t})\cdots K_{\nu+1,\mu-1}(t,\bar{t}) & K_{\nu+1,\mu+1}(t,\bar{t})\cdots K_{\nu+1,n}(t,\bar{t})\\ \vdots\qquad\qquad\vdots & \vdots\qquad\qquad\vdots\\ K_{n,0}(t,\bar{t})\cdots K_{n,\mu-1}(t,\bar{t}) & K_{n,\mu+1}(t,\bar{t})\cdots K_{n,n}(t,\bar{t})\end{vmatrix} \tag{21}$$

今論此形式之雅可比既約式. 我們得

$$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^{(n)}\,|L_\nu^{(n)}(X_0,\cdots,X_\nu)|^2. \tag{22}$$

這是與(18)有相同式樣的表達式, 我們只須指出當 $0\leqslant\nu\leqslant n$ 時

$$\sigma_\nu^{(n)}|L_\nu^{(n)}(X_0,\cdots,X_\nu)|^2=\frac{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{(\nu-1)\times(\nu-1)}|}{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{\nu\times\nu}|}\left|\frac{|(X_k)^{\nu\downarrow}(K_{kl}[t,\bar{t}])_{\nu}^{\nu\times\nu}|}{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{(\nu-1)\times(\nu-1)}|}\right|^2. \tag{23}$$

對於 $\nu=n$ 可用公式(15). 我們得

$$\sigma_n^{(n)}|L_n^{(n)}|^2=-\frac{1}{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{n\times n}|A_{nn}}|A_{0n}X_0+A_{1n}X_1+\cdots+A_{nn}X_n|^2=$$

$$=\frac{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{(n-1)\times(n-1)}|}{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{n\times n}|}\cdot\left|\frac{|(X_k)^{n\downarrow}(K_{kl}[t,\bar{t}])_n^{n\times n}|}{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{(n-1)\times(n-1)}|}\right|^2. \tag{24}$$

故(23)式於 $\nu=n$ 時已證及. 今設 $X_0,\cdots,X_{n-1}$ 固定而讓 X_n 變動;由定義,(22)是定正而因此它爲極小值當 $L_n^{(n)}(X_0,\cdots,X_n)=0$ 時. 此極小值將爲

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\sigma_\nu^{(n)}|L_\nu^{(n)}(X_0,\cdots,X_\nu)|^2. \tag{25}$$

另一方面

$$\min_{|X_n|<\infty}\lambda^{X_0,\cdots,X_n}(t)=\lambda_B^{X_0,\cdots,X_{n-1}}(t).$$

因此

$$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_{n-1}}(t)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\sigma_\nu^{(n)}|L_\nu^{(n)}(X_0,\cdots,X_\nu)|^2. \tag{26}$$

但設(18)式於$(n-1)$時眞確. 因此(23)式對 $\nu=0,\cdots,n-1$ 時亦眞. 因此(18)式對一切 n 均已證及.

此外還有

$$M_B^{X_0,\cdots,X_n}(z,t)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{|K_{kl}[t,\bar{t}]^{(\nu-1)\times(\nu-1)}|}{|K_{kl}[t,\bar{t}]^{\nu\times\nu}|}\frac{|(X_k)^{\nu\downarrow}(K_{kl}[t,\bar{t}]_\nu^{\nu\times\nu})|}{|(K_{kl}[t,\bar{t}]^{(\nu-1)\times(\nu-1)}|}\cdot\frac{|(K_{0k}[z,\bar{t}])^{\nu\downarrow}(K_{lk}[t,\bar{t}])_\nu^{\nu\times\nu}|}{|(K_{kl}[t,\bar{t}])^{(\nu-1)\times(\nu-1)}|}.$$

此恆等式之證明可仿前進行之. 我們再用海密頓雙綫性式的雅可比既約式(7)而且把 $K_0(z,\bar{t})$ 與 X_ν 看作變數[1]. 此節內第一定理的改變形式對於具有無窮多個插入條件的極小問題的討論是有用處的.

Bergman 6, 7, 13, 14, 22, 23.
Bieberbach.
Bochner 1.
Walsh 27, XI 章.

1) 見前 29 頁註 1.

III. 不變度量及最小積分法

1. 引　　言

本章介紹在B域內對共形不變的度量．在定義此度量之前先介紹一些微分幾何的基本概念．

首先討論三度空間內由下面方程定義的曲面：

$$x=\varphi(u, v), \qquad y=\psi(u, v), \qquad z=\chi(u, v). \tag{1}$$

方程 $\quad u=u(t), \qquad v=v(t), \qquad t_0\leqslant t\leqslant t_1,$

$$x=\varphi[u(t), v(t)], \ y=\psi[u(t), v(t)], \ z=\chi[u(t), v(t)] \tag{2}$$

定義了在曲面(1)上的一條曲綫．此曲綫之長度爲

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dt=\int_{t_0}^{t_1}ds(t), \tag{3}$$

其中

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2; \tag{4}$$

而E, F及G爲坐標u及v的函數，且

$$E=(\varphi_u^2+\psi_u^2+\chi_u^2), \quad F=(\varphi_u\varphi_v+\psi_u\psi_v+\chi_u\chi_v), \tag{5}$$
$$G=(\varphi_v^2+\psi_v^2+\chi_v^2).$$

微分形式(4)稱爲曲面的第一微分形式． 很多曲面上的重要性質僅與此形式有關．事實上，任何定正的二次形式

$$Ex^2+2Fxy+Gy^2, \tag{6}$$

其係數爲定義於u, v平面內某一域中二變數u及v的函數時，若令

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

就產生一黎曼流形．

變分學問題

$$\delta\int ds=0 \tag{7}$$

的極值曲綫叫作測地綫．一般來講，過曲面上每一點，經過每一方

向只有一根測地綫．此測地綫顯然只取決於第一基本形式．

設 P 是三度空間內曲面的一點，過 P 點的法綫可作無窮多平面，每一平面過 P 點截此曲面所生曲綫在 P 點有曲率半徑 p. 若 p_1 及 p_2 爲此平面之各種可能方向下所得之最大及最小值，則乘積

$$C=\frac{1}{p_1}\cdot\frac{1}{p_2} \tag{8}$$

稱爲曲率，全曲率或在 P 點處曲面的高斯曲率． 曲面的曲率可以用第一基本形式表出．下式眞確：

$$C=\frac{1}{2H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{H}\frac{\partial G}{\partial u}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{H}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{H}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\right\}, \tag{9}$$

其中

$$H^2=EG-F^2. \tag{10}$$

若我們於曲面上引入新的（曲綫的）坐標 ξ, η

$$u=u(\xi, \eta), \qquad v=v(\xi, \eta), \tag{11}$$

此曲率保持不變．

2. 不 變 度 量

設 z 平面內有一域 B. 所論度量爲方程

$$ds^2=K_B(z, \bar{z})|dz|^2=K_B(z, \bar{z})\ [dx^2+dy^2], \tag{12}$$

所定義，即

$$E=G=K_B(z, \bar{z}), \qquad F=0,$$

而 $K_B(z, \bar{t})$ 爲核函數．因 $K_B(z, \bar{z})>0$, 故形式爲定正． 我們可以證明將域 B 共形映照到 B' 而距離定義如前（當然我們用的是 B' 的核函數），則此度量是不變的．換句話說，此度量是共形不變量．把 B 映照到 B' 上的函數記爲

$$\zeta=\phi(z), \tag{13}$$

其逆函數爲 $z=\psi(\zeta)$, B 中面積元素記爲 $d\omega_z$, B' 中面積元素記爲 $d\omega_\zeta=d\xi d\eta$, 而 $\xi+i\eta=\zeta$. 設 $f(z)$ 爲一 $\mathfrak{L}^2(B)$ 類內的函數，則函數 $f[\psi(\xi)]\psi'(\xi)$ 屬於 $\mathfrak{L}^2(B')$ 類．事實上，有

$$\iint_{B'} |f[\psi(\zeta)]|^2|\psi'(\zeta)|^2 d\omega_\zeta = \iint_B |f(z)|^2|\psi'(\zeta)|^2 \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} d\omega_z$$

$$= \iint_B |f(z)|^2 \, d\omega_z; \tag{14}$$

因爲由於

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = |\psi'(\zeta)|^{-2}. \tag{15}$$

令 $\{\phi_\nu(z)\}$ 爲 B 中一個閉就範直交系. 函數

$$\psi_\nu(\zeta) = \phi_\nu[\psi(\zeta)]\psi'(\zeta) \qquad (\nu = 1,\, 2,\, \cdots) \tag{16}$$

構成 B' 內閉就範直交系. 由核函數的定義有

$$K_{B'}(\zeta,\,\bar{\zeta}_1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(\zeta)\overline{\psi_\nu(\zeta_1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \phi_\nu[\psi(\zeta)]\,\overline{\phi_\nu[\psi(\zeta_1)]}\,\psi'(\zeta)\overline{\psi'(\zeta_1)}$$

$$= \psi'(\zeta)\overline{\psi'(\zeta_1)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \phi_\nu(z)\,\overline{\phi_\nu(z_1)}, \tag{17}$$

或

$$K_{B'}(\zeta,\,\bar{\zeta}_1) = K_B(z,\,\bar{z}_1)\,\frac{dz}{d\zeta}\left(\overline{\frac{dz_1}{d\zeta_1}}\right). \tag{18}$$

因此得到 B' 的綫元素

$$ds^2_{B'}(\zeta) = K_{B'}(\zeta,\,\bar{\zeta})|d\zeta|^2 = K_B(z,\,\bar{z})\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 |d\zeta|^2 = ds^2_B(z). \tag{19}$$

公式(18)及(19)指出在共形變換下核函數爲相對不變量而綫元素爲絕對不變量. 度量的不變性因此已證及.

(12)式所定義的抽象黎曼流形稱爲 B 域的**基本空間**. 若 B 可共形映照於 B', 則 B 的基本空間亦可爲 B' 的基本空間. 換句話說, 屬於等價類內的諸域有同一基本空間. 在 B 域內歐氏坐標 x, y 定義了基本空間內坐標系, 與 B 對等的域 B' 中的歐氏坐標定義了基本空間內的另一坐標系. 故屬於同一等價類的二域共形變換對應於改變類中基本空間的坐標.

3. 單 連 通 域

本章所介紹度量性的一個顯要特徵乃其單調性. 若 B 及 B' 爲二單葉域且 $B' \subset B$; ds 及 ds' 是由 (12) 式分別在 B 及 B' 內所

定義的非歐綫元素長度，則

$$ds' \geqslant ds, \tag{20}$$

此等式只於域 B 及 B' 相合之情况下才成立．事實上，由於(12)式，若我們能證

$$K_B(z, \bar{z}) \leqslant K_{B'}(z, \bar{z}), \tag{21}$$

則也可證明(20)．

但 $[K_B(z, \bar{z})]^{-1}$ 爲積分

$$\iint_B |f(t)|^2 d\omega$$

在輔助條件 $f(z)=1$ 之下的極小值．所以

$$\frac{1}{K_{B'}(z,\bar{z})} \leqslant \iint_{B'} \left|\frac{K_B(t,\bar{z})}{K_B(z,\bar{z})}\right|^2 d\omega \leqslant \iint_B \left|\frac{K_B(t,\bar{z})}{K_B(z,\bar{z})}\right|^2 d\omega = \frac{1}{K_B(z,\bar{z})},$$

它是相當於(21)式的．

(20)式當 B 及 B' 爲單連通域情况下時特别重要． 由黎曼映照定理，有函數 $w=f(z)$ 使 B 共形映照到 B'，而使 $t=f(t)$ 成立．此處 t 爲 B' 的一已知點．爲了敍述簡單起見，設 B 爲單位圓的內部．在此情况下

$$K_B(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-|z|^2)^2},$$

所以有

$$ds_B = \frac{|dz|}{\pi^{\frac{1}{2}}(1-|z|^2)}.$$

在共形映照 $z \to w$ 下，ds 保持不變．因此

$$ds_{B'} = \frac{|dz|}{\pi^{\frac{1}{2}}(1-|z|^2)}.$$

對於 $ds_{B'}$ 用(20)及用非歐綫元素於單位圓中，最後得

$$\frac{|d\omega|}{1-|\omega|^2} \leqslant \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

此不等式指出在單連通域情况下度量不變性引出雙曲度量的同一結果．有一值得注意之趣事即在此情况下我們的度量全同於——常數因子不管——匹克-邦加萊(Pick-Poincafe)的古典度量[1]．

1) [3, 41 頁] 及 [18, 5 頁].

今可利用公式(9)計算此種度量的曲率．我們有

$$E=G=\frac{1}{\pi(1-x^2-y^2)},\qquad F=0,\tag{22}$$

$$C=-4\pi.\tag{23}$$

注意此曲率是一常數． 在多連通域中，雙曲度量性爲泛覆疊曲面引進也有一負的常數曲率． 在異於單連通域的其它情况下，不變度量的曲率不是常數，可參閱蔡倫加未齊及卡發利富(Zarankiewiz 及 Kufareff)的著作．

4. 一 般 討 論

爲方便起見介紹微分算子．本節內當研究度量的若干簡單性質．

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}-i\frac{\partial}{\partial \eta}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial \bar\zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}+i\frac{\partial}{\partial \eta}\right),$$

$$z=x+iy,\qquad \zeta=\xi+i\eta.$$

若 $f(z)$爲 z 的解析函數，則

$$f'(z)=\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial f(z)}{\partial x}=-i\frac{\partial f(z)}{\partial y}=\frac{\partial f(z)}{\partial z}.$$

仿此，若 $f(\bar z)$爲 $\bar z$ 的解析函數，則有

$$f'(\bar z)=\frac{\partial f(\bar z)}{\partial \bar z}.$$

若 $u(x,y)$爲調和函數及 $v(x,y)$爲其共軛，則

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u+iv).$$

若 $f(z)$表示解析函數 $u+iv$，從而有

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}f'(z),$$

且仿此

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\overline{f'(z)}.$$

今首先導出曲率爲一簡單公式．

令 B 爲一任意域．在 z 處的曲率 $C(z)$ 爲

$$C(z)=-\frac{2(\lambda_B^1)^2}{\lambda_B^{01}}. \tag{24}$$

證． 由公式(9)得

$$C(z)=-\frac{1}{2K}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial y}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2K}\left[\frac{\partial^2\log K}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\log K}{\partial y^2}\right],\ K=K(z,\bar{z}).$$

用複導數，可記成形式

$$C(z)=-\frac{2}{K}\frac{\partial^2\log K}{\partial z\partial\bar{z}}. \tag{25}$$

今

$$\frac{\partial^2\log K}{\partial z\partial\bar{z}}=-\frac{1}{K^2}\left[K_{10}K_{01}-K_{00}K_{11}\right];$$

因此

$$C(z)=-\frac{2}{K^3}\begin{vmatrix}K_{00} & K_{01}\\ K_{10} & K_{11}\end{vmatrix}.$$

此公式指出曲率可由以前介紹之極值量表出之． 核函數 $K=$ $=K_B(z,\bar{z})$ 恆等於 $(\lambda_B^1)^{-1}$．此外有

$$\lambda_B^{10}=K\begin{vmatrix}K_{00} & K_{01}\\ K_{10} & K_{11}\end{vmatrix}^{-1}. \tag{26}$$

因此

$$C(z)=-\frac{2(\lambda_B^1)^2}{\lambda_B^{01}}. \tag{27}$$

由定義，諸 λ 爲正．故已證及我們的度量的曲率恆爲負數．

曲率可由極值量 λ 表出之事實可使我們在任意域 B 內一點 z 上計算曲率的上界及下界． 設 I 及 A 爲兩含 z 點有界單覆域，且有

$$I\subset B\subset A. \tag{28}$$

由 λ 值的定義得

$$\lambda_I^1\leqslant\lambda_B^1\leqslant\lambda_A^1,\qquad \lambda_I^{01}\leqslant\lambda_B^{01}\leqslant\lambda_A^{01}. \tag{29}$$

因此

$$-\frac{2(\lambda_I^1)^2}{\lambda_A^{01}}\geqslant C\geqslant -\frac{2(\lambda_A^1)^2}{\lambda_I^{01}}. \qquad (30)$$

今設 r 及 R 分別表示由 z 點到 B 域界上最小及最大距離；且"比較域" I 及 A 吾人可選取以 z 爲心及各以 r 及 R 爲半徑之圓. 若對此域的對應最小值分別記爲 λ_r^1, λ_r^{01}, 及 λ_R^1, λ_R^{01}, 則有

$$-\frac{2(\lambda_R^1)^2}{\lambda_r^{01}}\leqslant C\leqslant -\frac{2(\lambda_r^1)^2}{\lambda_R^{01}}.$$

頗易證明

$$\lambda_r^1(z)=\pi r^2,\quad \lambda_r^{01}(z)=\pi\frac{r^4}{2},\quad \lambda_R^1(z)=\pi R^2,\quad \lambda_R^{01}(z)=\pi\frac{R^4}{2}. \qquad (31)$$

因此

$$-4\pi\left(\frac{R}{r}\right)^4\leqslant C\leqslant -4\pi\left(\frac{r}{R}\right)^4.$$

今將探究在域中度量在邊界上的性質，爲此，事先指出在對域不是有界的情况下，當如何拓廣核函數、度量、積分最小值等等的定義. 此論證亦指出，上述概念對不是單覆域來說如何定義.

設 B 爲一任意域而能共形映照到有界的單覆域 B^*. 令 $z=z(z^*)$ 爲 B^* 映照到 B 的函數，且設 $z^*=z^*(z)$ 爲其逆函數. 若

$$\{\phi_\nu(z^*)\} \qquad (32)$$

爲 B^* 內的封閉就範直交集，則顯然

$$\left\{\phi_\nu[z^*(z)]\frac{dz^*}{dz}\right\}\equiv\{\psi_\nu(z)\} \qquad (33)$$

爲 B 內完全就範直交集. 今可定義 $K_B(z,\bar{t})=\sum_{\nu=1}^{\infty}\psi_\nu(z)\overline{\psi_\nu(t)}$，且一如從前用此核函數造一黎曼度量. 此度量顯然對共形變換有不變性. 必須注意有界條件的唯一用處是保證完全就範直交系的存在. 但若 B 能共形映照於一有界域上，如此之集也能得到存在性.

今進而探求在 B 的度量在邊界上的性質. 今設 B 爲單葉，且設過 B 的界點有二圓其中之一全在域內；而另一卻全在域外. 我們很感興趣的來假設界點在原點上，且此圓有形式

$$|z-r_1|<r_1 \qquad |z+r_2|<r_2 \qquad r_1,\ r_2>0. \qquad (34)$$

今我們希望知道當 z 沿扇形域 $|\arg z|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ 內的一條途徑趨向

原點時，核函數 $K_B(z,\bar{z})$的動態．用A表示圓 $|z+r_2|=r_2$ 的外部,及用 I 表示圓 $|z-r_1|=r_1$ 的內部．I 及 A 的得出可以由於單位圓 $|\zeta|<1$ 分別施行變換

$$z=r_1\zeta+r_1 \qquad z=\left(\frac{r_2}{\zeta}\right)-r_2.$$

因此

$$\begin{aligned} K_I(z,\bar{z})&=\frac{1}{\pi\left(z+\bar{z}-\dfrac{z\bar{z}}{r_1}\right)^2}, \\ K_A(z,\bar{z})&=\frac{1}{\pi\left(z+\bar{z}+\dfrac{z\bar{z}}{r_2}\right)^2}. \end{aligned} \tag{35}$$

當 z 在扇形域 $|\arg z|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ 內趨向原點時,則

$$\lim_{z\to 0}\left[\frac{z+\bar{z}-\dfrac{z\bar{z}}{r_1}}{z+\bar{z}}\right]=1;$$

因此

$$\lim_{z\to 0}\left[(z+\bar{z})^2\ K_I(z,\bar{z})\right]=\frac{1}{\pi}. \tag{36}$$

同法可知

$$\lim_{z\to 0}\left[(z+\bar{z})^2\ K_A(z,\bar{z})\right]=\frac{1}{\pi}. \tag{37}$$

由於 $I\subset B\subset A$,故有

$$(z+\bar{z})^2K_I\geqslant(z+\bar{z})^2K_B\geqslant(z+\bar{z})^2K_A,$$

因此

$$\lim_{z\to 0}(z+\bar{z})^2\ K_B(z,\bar{z})=\frac{1}{\pi}. \tag{38}$$

此關係式指出在邊界上核函數與從邊界上相距的倒數的二次方冪一樣成爲無窮大．綫元素也成爲無窮當距離的倒數成爲無窮時．在度量中邊界點爲無窮遠點．

令 $C_I(z)$ 及 $C_A(z)$ 分別表示對應於 I 域及 A 域的高斯曲率．I 及 A 對等於單位圓,因此 $C_1(z)\equiv 4\pi$, $\zeta_A(z)\equiv -4\pi$.用(35)可計算出

$$\lim_{z\to 0}\frac{\lambda_I^1(z)}{(z+\bar z)^2}=\pi,\qquad \lim_{z\to 0}\frac{\lambda_A^1(z)}{(z+\bar z)^2}=\pi. \tag{39}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\lambda_I^{01}(z)}{(z+\bar z)^4}=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{z\to 0}\frac{\lambda_A^{01}(z)}{(z+\bar z)^4}=\frac{\pi}{2}. \tag{40}$$

因為

$$-\frac{2(\lambda_I^1)^2}{\lambda_A^{01}}\geqslant C\geqslant -\frac{2(\lambda_A^1)^2}{\lambda_I^{01}},$$

故有

$$\lim_{z\to 0} C(z)=-4\pi. \tag{41}$$

因此我人已證及以下定理:

令B為一任意單葉域. 設t_0是B的一界點能使過t_0點作二圓,一在B內;一在B外,則$\lim_{z\to t_0} C(z)=-4\pi$. 只須當$z$趨近$t_0$時使$z-t_0$及內法綫之交角的絕對值小於$\alpha<\frac{\pi}{2}$.

令z_0為所給域內任一內點,在每一個方向我們由z_0順沿着歐氏直綫以距離$\left.\frac{ds}{|dz|}\right|_{z=z_0}$來取下一點,微商是沿着那個方向取的. 因此在$z_0$旁得到一簡單封閉曲綫,稱它為在$z_0$點的度量指示綫(此曲綫不須要必在$B$內). 在一般黎曼流形上此曲綫可有各種形式,但此處因為

$$\left.\frac{ds}{|dz|}\right|_{z=z_0}=[K(z_0,\bar z_0)]^{\frac{1}{2}}$$

與方向無關,故指示綫恆為一圓.

分別把 II, (7)及 II, (7′) 內$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)$及$M_B^{X_0,\cdots,X_n}(z,t)$與利用公式(12)的不變度量所得到的各種幾何量作比較,可知上面的量常能表示$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(z)$或$M_B^{X_0,\cdots,X_n}(z,t)$之組合. 例如,得$K_B(z,\bar z)=[\lambda_B^1(z)]^{-1}$及(24)式. 另一方面存在各種關係表示了$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)$及$M_B(z,t)$依賴於$B$域. 例如$\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)$單調相倚於$B$. 本章及上一章曾示出諸例[見(20), (41)]如何用此等事實去獲得已知條件下的幾何量的界. 此種步驟是稱為最小積分法,而且可進一步,用來定由度量(12)所定的各種不變式的界;用來研

究在歐氏空間的域在其中不變性度量(12)具有某些能够明覺的性質，及用在偏差理論等等中。

Bergman 6, 7, 11, 13.
Carathéodory 1, 1.
Kufareff.
Zarankiewicz 1, 2.

IV. 核函數及希爾伯脫空間

前章之發展曾專門論及在已知 B 域內正則的諸解析函數，而且不難知此結果不全是函數論的方法． 此注意引入了希望，若我們陸續除去已用函數論的方法而餘下的"骨骼"，則可用到其它數學領域中且亦能產生有意義的結果．事實上將證實於以後諸章中．

下面的意見是適當的．複變函數論以及二實變數的調和函數理論(事實上即同一件事)顯示出典型的優美和豐富的結果．這是由於這樣的事實：在這個特別的領域中許多形式簡單，但爲有力的法則及技巧都是很有用的．對複變函數內有用的一個單獨方法或技巧有時可拓展到有關的領域上，事實上許多不同方法同時有效而使得函數論成爲如此豐饒的領域．

企圖將複變數函數論的若干結果拓廣到較接近的有關領域中，那是很自然的，例如多元複變數函數論及滿足非拉普拉斯方程的橢圓微分方程的函數．如此之企圖時常有許多幾乎不能克服的困難阻礙着，這是由於產生函數論結果的有效用的方法爲非常特定的函數理論，即使在非常接近有關域中亦失效，這就說明在上述兩領域中何以結果比較貧乏．

據此說法，在前章函數理論所得的結果由於所用方法僅用到一些解析函數與其它許多各種函數類也共同有的性質，這一事實得到特別意義． 不僅此新方法使不同領域內產生新結果，而且亦將首先用已知複變函數論中已知結果作爲我們此種領域中相當的探索．

在前章內，我們設解析函數系 $\{f_\nu\}$ 在 B 域內正則，而有一有限的積分

$$(f_\nu, f_\nu)=\iint_B |f_\nu(z)|^2\, dxdy,$$

且由條件

$$(f_\nu, f_\mu)=\iint_B f_\nu(z)\,\overline{f_\mu(z)}\, dx\, dy=\delta_{\nu\mu}$$

所就範直交化． 準照上述，今我們將重立基本法則使它們對一般函數類及就範直交系也能有用，這些恰當的事實能够用希爾伯脫空間的言語把它們導致簡明描述，爲此我們建立這些藉助於希爾伯脫空間的術語．

因爲有些讀者容或對希爾伯脫空間理論不熟悉，所以我們在此插入與此有關的定義．

若滿足如下條件[1](A)，(B)及(C)，則 H 是希爾伯脫空間．

(A) H 是“綫性的”、“賦範的”及“完全的”，它們有下面定義．

(a)一空間是綫性的，當對每二任何元素 a 及 b 且對任何二複數 α 及 β，元素 $\alpha a+\beta b$ 在空間內定義而且此運算服從矢量代數的常用規則．

(b)此綫性空間稱爲賦範的，當對應於每一元素 x，範數 $\|x\|$ 由下述性質定義：$\|x\|\geqslant 0$ 而 $\|x\|=0$，當且僅當 $x=0$；$\|x\|$ 滿足三角不等式，即

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

$\|x\|$ 定義空間內一度量，二元素 x 及 y 間之距離給出爲 $\|x-y\|$．一數列 $\{x_n\}$ 稱爲收斂於 x 若 $\|x-x_n\|\to 0$． 一數列 $\{x_n\}$ 稱爲柯西(Cauchy)數列，若 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$．

(c)空間 H 是完全的，當每一柯西數列收斂於 H 中的一個元素．

(B) H 內一元素 x 的範數給出爲 $\|x\|=(Q(x,x))^{\frac{1}{2}}$，而 $Q(x,y)$ 爲定正的海密頓數積．即 $Q(x, y)$ 爲一相關於 x 及 y 的複數且滿足下式

$$Q(x, y)=\overline{Q(y, x)},$$

$$Q(\alpha x_1+\beta x_2, y)=\alpha Q(x_1, y)+\beta Q(x_2, y),$$

$$Q(x, x)\geqslant 0,\ \text{用等號只當}\ x=0.$$

(C)空間 H 有一可數基，即一數集 $\{u_i\}$ $(u_i\in H)$ 使任一 $x\in H$ 可表示爲 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i u_i$ 而 α_i 爲複數，而 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i u_i$ 乃指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i\|=0$．

---

1) 我們在這裏只考慮及特殊的希爾伯脫空間，即，使可分離性公理成立者．

設一函數類 $\{f\}$ 組成一希爾伯脫空間 H, 且令 $\{f_\nu\}$ 爲 H 的基, 它已經由下面條件

$$(f_\nu,\ f_\mu)=\delta_{\mu\nu},$$

就範直交化. 今可以對於在基本域內的任一對點 P 及 Q, 在一純粹形式方法下介紹核函數

$$K(P,\ Q)=\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(P)\,\overline{f_\nu(Q)}. \tag{1}$$

定義(1)將有意義, 僅當此雙綫性級數收斂. 但此不常能如此, 正如最簡例之證明者. 因此有二類函數構成希爾伯脫空間. 他們以存在或不存在核函數爲他們的特徵. 此處我們只論及第一類型.

若核函數 (1) 的存在已有保障, 則第 I—III 章內對於特殊情況單值解析正則於一已知域以及對以前採用特殊定義模方等大部分理論可逐字逐句地推廣到一般情況中. 例如, 我抄引核函數的最小性質, 讀者易於驗證極小問題: $(f,f)=\min$, $f(Q)=1$. f 屬於 $\{f_\nu\}$ 的包集中, 而有解 $f=\dfrac{K(P,Q)}{K(Q,Q)}$, 且最小值爲 $\dfrac{1}{K(Q,Q)}$. 另一性質即核函數對於屬於 $\{f_\nu\}$ 的閉包的函數 f 的再生性質, 即恆等式

$$(f(P),\quad K(P,\ Q))=f(Q) \tag{2}$$

也可以用一適當於以前在特殊情況下採用的方法而很容易地獲得.

$(x,\ y)$是恆正有定海密頓二次形式, 若 λ 爲複參數, 則有

$$0\leqslant(K+\lambda f,\ K+\lambda f)=(K,\ K)+2\mathrm{Re}\,\{\lambda(f,\ K)\}+|\lambda|^2(f,\ f).$$

如同雪瓦茲不等式的方法所常用的證明推出

$$|(f,\ K)|^2\leqslant(K,\ K)\ \ (f,\ f).$$

藉助於(2), 產生

$$|f(Q)|\leqslant(K(Q,\ Q))^{\frac{1}{2}}\cdot\|f\|.$$

下面不等式的存在

$$|f(P)|\leqslant M(P)\|f\|, \tag{3}$$

(此處$M(P)$依賴於點 P 但不依賴於函數 f) 是我們所論在希爾伯脫空間內所需的核函數存在的必要條件. 另一方面若有不等式

(3) 式，前論引出核函數的極小問題在系 $\{f_\nu\}$ 的閉包內有一解．讀者不難證明不等式(3)式之存在而得出核函數之存在．故(3)式是一個方便的對已知函數類及已知就範化的核函數的存在性的充要判斷．

對於定義域的核函數的單調性(在前章引出介紹不變度量及引出有關雪瓦茲引理的概念)不能常推廣到我們所論一般的希爾伯脫空間內．然而在較一般化情況時,其中包括最重要的特別情況,此結果常是可能的。設函數 f_ν 在基本域 D 內定義，且按範數 $\|f\|$ 的定義亦依賴於 D，故我人亦可記爲 $\|f\|_D$．更設在 D 內 z 域 D' 內可定義範數 $\|f\|_{D'}$，並有

$$\|f\|_{D'} \leqslant \|f\|_D.$$

此時,例如,當範數 $\|f\|_D$ 爲一在 D 上取定正的容積積分．

令 Q 爲 D' 的一點(自然亦爲 D 的)且將系 $\{f_\nu\}$ 的核函數——當然亦定義於 D' 內——對於範數 $\|f\|_{D'}$ 者用 $K_{D'}(P, Q)$表示之．由於極小性質故有

$$\frac{1}{K_{D'}(Q,Q)} \leqslant \frac{\|K_D(P,Q)\|_{D'}^2}{K_D^2(Q,Q)}.$$

因此,鑒於我們所設之範數,當有 $\|K_D(P,Q)\|_{D'} \leqslant \|K_D(P,Q)\|_D$，由此可得

$$\frac{1}{K_{D'}(Q,Q)} \leqslant \frac{\|K_D(P,Q)\|_D^2}{K_D^2(Q,Q)} = \frac{1}{K_D(Q,Q)},$$

因此

$$K_D(Q, Q) \leqslant K_{D'}(Q, Q).$$

所以 $K_D(Q, Q)$的值當基本域減縮時却單調增加．

在本章內列舉的一般理論的舉例當於以下幾章內述及因此不再在此論述．

Aronszajn 3, 4, 5.

Bergman 6.

Bergman and Schiffer 3, 6, 7.

v. Neumann 19.

v. Nagy.

Stone 23.

V. 典型區域函數的表示

1. 狄里希萊積分和典型函數

在本章中，我們將引進區域 B 內的調和函數的封閉系，它們對於狄里希萊(Dirichlet)積分

$$D\{\varphi,\psi\}=\iint_B\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\}d\omega$$

是直交的． 爲了給這個直交調和函數的理論作一些準備工作，我們給與連系於 B 的典型區域函數以簡短的討論．

我們假設區域 B 具有有限連通數 p，且其邊界 b 由閉光滑曲線 $b_1, \cdots, b_p$ 所組成． 我們說一曲綫是光滑的，如果它具有連續轉動的切綫． B 的格林函數 $G(z,\zeta)$ 定義如下：$G(z,\zeta)$ 對於 $z\in B$ 除去點 $z=\zeta$ 外是調和的，而 $G(z,\zeta)+\log|z-\zeta|$ 在點 $z=\zeta$ 處調和，且當 z 趨近於 b 時 $G(z,\zeta)$ 趨向於零． B 的奈依曼函數具有與格林函數相同的對數奇點，且滿足條件

$$\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial n_z}=\text{const}. \qquad (z\in b) \tag{1}$$

$$\int_b N(z,\zeta)ds_z=0, \tag{2}$$

這裏 n_z 爲 b 在 $z\in b$ 處的內法綫．

容易看到，(1)式中常數的值必須爲 $2\pi/l$，這裏 l 爲 b 的長度．事實上，設 Γ 爲以 $z=\zeta$ 爲中心，r 爲半徑的小圓． 於是按照格林公式

$$\int_b\frac{\partial N}{\partial n_z}ds_z=\int_\Gamma\frac{\partial N}{\partial n_z}ds_z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}rd\theta+O(r)=2\pi+O(r)=2\pi,$$

這是因爲左邊的積分與 r 無關的緣故．

這樣，假使我們要求

$$\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial n_z}=c=\text{const}, \qquad (z\in b)$$

那末我們必須有 $c=2\pi/l$.

如所周知,函數 $G(z,\zeta)$和 $N(z,\zeta)$是存在的[1]. 它們滿足對稱條件關係式:

$$G(z,\zeta)\equiv G(\zeta,z),\quad N(z,\zeta)=N(\zeta,z), \tag{3}$$

所以它們對於 ζ 也正如對 z 一樣是調和的. 我們僅對N證此對稱性,因爲對於 G 的證明是完全相似的. 我們以 Γ^* 記以 $t=z$ 爲中心, r 爲半徑的圓,由(1)及(2),我們得

$$2\pi[N(z,\zeta)-N(\zeta,z)]=\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma+\Gamma^*}\left\{N(t,\zeta)\frac{\partial N(t,z)}{\partial n_t}-\right.$$
$$\left.-N(t,z)\frac{\partial N(t,\zeta)}{\partial n_t}\right\}ds_t=$$
$$=\int_b\left\{N(t,\zeta)\frac{\partial N(t,z)}{\partial n_t}-N(t,z)\frac{\partial N(t,\zeta)}{\partial n_t}\right\}ds_t=$$
$$=\frac{2\pi}{l}\int_b N(t,\zeta)ds_t-\frac{2\pi}{l}\int_b N(t,z)ds_t=0,$$

因此(3)式得證.

我們以 $\Lambda^2(B)$表示在B内滿足條件

$$D\{\varphi\}=D\{\varphi,\varphi\}<\infty, \tag{4}$$

$$\int_b\varphi\,ds=0 \tag{5}$$

的單值調和函數族. 條件(5)是有約束的,因爲的確存在有調和函數 $\varphi(z)$, 它滿足條件(4),但對於它來說(5)沒有意義. 以後將指出,條件(5)可以改爲另一不同的形式——公式(14)——它可應用於滿足條件(4)的最普遍的調和函數. 由格林定理,我們有

$$D\{N(z,\zeta),\varphi(\zeta)\}=\iint_B\left\{\frac{\partial N}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\partial N}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right\}d\omega=$$
$$=+\lim_{r\to 0}\int_{|\zeta-z|=r}\varphi\frac{\partial N}{\partial n_\zeta}ds_\zeta-\int_b\varphi\frac{\partial N}{\partial n_\zeta}ds_\zeta= \tag{6}$$
$$=2\pi\varphi(z)-\frac{2\pi}{l}\int_b\varphi\,ds=2\pi\varphi(z).$$

---

1) 參看[12, 第9章].

我們以 $\omega(z, C)$ 記 B 內的有界調和函數，當 z 趨向於由 b 上的弧所組成的某集合 C 時，它趨向於 1；而當 z 趨向於 b 上的其它部分時，它趨向於 0. $\omega(z, C)$ 稱爲 C（相對於 B）在 z 點的調和測度. 若 b 由 p 個互不相聯的曲綫 $b_1, \cdots, b_p$ 所組成，則我們將以 ω_ν 記 b_ν 的調和測度. 由格林公式，我們有

$$\omega_\nu(z) = \omega(z, b_\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_b \omega_\nu(\zeta)\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta,$$

因而由 $\omega_\nu(z)$ 的邊界性質

$$\omega_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta. \tag{7}$$

若以 $H(\zeta, z)$ 記格林函數 $G(\zeta, z)$ 的共軛調和函數，則由柯西-黎曼方程，我們有 $\frac{\partial G}{\partial n_\zeta} = -\frac{\partial H}{\partial s_\zeta}$，因而

$$\omega_\nu(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}\frac{\partial H(\zeta,z)}{\partial s_\zeta}ds_\zeta = -\frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}dH(\zeta, z).$$

這樣，若 ζ 描出邊界曲綫 b_ν，則 $-2\pi i\omega_\nu(z)$ 爲解析函數 $P(\zeta, z) = G(\zeta, z) + iH(\zeta, z)$ 的周期.

容易證明 $\Sigma_{\nu=1}^{p}\omega_\nu(z) = 1$，但任意 $p-1$ 個調和測度都是綫性無關的.

我們以 $\tilde{\omega}_\nu(z)$ 記調和測度 $\omega_\nu(z)$ 的共軛調和函數，且置

$$F_\nu(z) = \omega_\nu(z) + i\tilde{\omega}_\nu(z), \qquad \nu = 1, \cdots, p.$$

$F_\nu(z)$ 稱爲 B 的第一類規格函數，而 $P(\zeta, z)$ 稱爲第三類函數.

以 $ip_{\nu\mu}$ 記 $F_\nu(z)$ 對於邊界曲綫 b_μ 的周期，我們有

$$p_{\nu\mu} = \int_{b_\mu} d\tilde{\omega}_\nu(z) = -\int_{b_\mu}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}ds.$$

由格林公式

$$\int_b\left(\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\omega_\mu - \frac{\partial\omega_\mu}{\partial n}\omega_\nu\right)ds = 0,$$

我們可以容易地導出對稱關係式

$$p_{\nu\mu} = p_{\mu\nu}.$$

對於任意不全爲零的實數 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$，我們有

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\lambda_\mu p_{\mu\nu}=-\sum_{\nu=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\mu_\mu\int_{b_\mu}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}ds=$$

$$=-\sum_{\nu=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\lambda_\mu\int_b\omega_\mu\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}ds=$$

$$=-\int_b\left\{\sum_{\nu=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\lambda_\mu\omega_\mu\frac{\partial\tilde{\omega}_\nu}{\partial n}\right\}ds=$$

$$=-\int_b\left(\sum_{\nu=1}^{p-1}\lambda_\nu\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\right)\left(\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\mu\omega_\mu\right)ds. \tag{8}$$

因爲 $\omega_\nu(1\leqslant\nu\leqslant p-1)$是綫性無關的,應用格林公式,我們有

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\lambda_\mu p_{\mu\nu}=D\left\{\sum_{\nu=1}^{p-1}\lambda_\nu\omega_\nu\right\}>0,$$

因而行列式 $|(p_{kl})^{(p-1)\times(p-1)}|$ 不爲零[1].

這樣,我們可以將任意一個在 B 內單值解析的函數 $f(z)$ 的積分表爲一單值函數與 $F_1, \cdots, F_p$ 之一適當的綫性組合之和. 事實上,假設函數 $\int_{z_0}^{z}f(z)\,dz$ 對於以圍繞 b_ν 的途徑的周期爲 $a_\nu(\nu=1, \cdots, p)$. 我們建立形如

$$F(z)=\sum_{j=1}^{p-1}\mu_jF_j(z)$$

的函數,使其具有周期 a_ν, 這是可能的,因爲行列式 $|(p_{kl})^{(p-1)\times(p-1)}|$ 不爲零,因而方程組

$$i\sum_{j=1}^{p-1}\mu_jp_{js}=a_s,\qquad s=1, \cdots, p-1$$

有一解. 函數 $\int_{z_0}^{z}f(z)dz-F(z)$ 顯然沒有周期, 而 $f(z)$ 可寫爲形式

$$\int_{z_0}^{z}f(z)dz=g(z)+\sum_{j=1}^{p-1}\mu_jF_j(z), \tag{9}$$

這裏 $g(z)$ 在 B 內是單值的.

---

1) 從現在開始,除非有相反的聲明,我們恆將以 $(a_{kl})^{n\times n}$ 來記一 $n\times n$ 矩陣,其中足標 k, l 由 1 變到 n.

函數 $F_\nu(z)$所以被稱為第一類函數，這是因為，在許多方面它與虧數為 $p-1$ 的閉黎曼曲面上的第一類阿貝爾 (Abel) 積分相似[1]. 由於相似的理由，我們稱函數 $P(z, \zeta)$（它的實部為格林函數 $G(z, \zeta)$）為第三類函數. 追隨這個相似性，自然要在 B 內定義第二類函數. $S(z)=\sigma(z)+i\tau(z)$稱為在 B 內的第二類函數，如果它在 B 內除開有限多個極點外是正則的，且其實部在每一 b_ν 上為常數. 第二類函數最簡單的例子乃是第三類函數 $P(z, \zeta)$ 對其參數的實部的微商 $\partial[P(z, \zeta)]/\partial\xi$ $(\zeta=\xi+i\eta)$. 容易驗證，$\partial[P(z, \zeta)]/\partial\xi$ 在 $z=\zeta$ 處有一留數為 1 的極點，且對於 $z\in b$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}[P(z, \zeta)]\right\}\equiv 0.$$

2. 直交調和函數

為了引進直交調和函數的封閉系，我們來定義族 $\mathfrak{L}^2(B)$ 的子族 $l^2(B)$，它由 $\mathfrak{L}^2(B)$中那些具有單值不定積分的函數的全體所組成. 正如在第一章中對族 $\mathfrak{L}^2(B)$引進封閉系時所作的那樣，我們可以在 $l^2(B)$ 族中引進直交函數的封閉系 $\{g_\nu(z)\}$. 我們用通常的方法來定義這個新系的核函數

$$\tilde{K}_B(z, \bar{\zeta})=\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(z)\overline{g_\nu(\zeta)}. \tag{10}$$

現在轉向於調和函數的情形，使這個理論基於狄里希萊積分

$$D\{\varphi, \psi\}=\iint_B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)d\omega$$

所引進的度量上，這是自然的.

我們定義族 $\Lambda^2(B)$，它在 B 內滿足條件(5)，且由具有有限狄里希萊積分

$$D\{\varphi\}=D\{\varphi, \varphi\}<\infty$$

的全體調和函數所組成；我們必須證明，**對於族 $\Lambda^2(B)$，存在一封閉系 $\{\varphi_\nu\}$，它對於狄里希萊積分是直交的**，亦即

$$D\{\varphi_\nu, \varphi_\mu\}=\delta_{\nu\mu},\quad \delta_{\nu\nu}=1,\quad \delta_{\nu\mu}=0,\qquad \nu\neq\mu. \tag{11}$$

---

1) 在夏德基(Schottky)的理論中，它們是直接從重覆面上的積分獲得的.

設 $\varphi \in \Lambda^2(B)$ 有一單值的共軛調和函數 ψ. 與前相同以 $\omega_\nu(z)$ 記 b_ν 的調和測度,假設 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 在 b 上有定義而且連續, 則由格林定理我們有

$$D\{\varphi,\omega_\nu\}=-\int_b \omega_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial n}ds=-\int_{b_\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial n}ds=$$

$$=\int_{b_\nu}\frac{\partial \psi}{\partial s}ds=\int_{b_\nu}d\psi(s)=0; \tag{12}$$

若這後一條件不滿足, 則藉助於下述技巧, 我們仍可證明 $D\{\varphi, \omega_\nu\}=0$. 以 B_ε 記由調和測度 ω_ν 的階層曲綫 $\omega_\nu(z)=\varepsilon$ 及 $\omega_\nu(z)==1-\varepsilon(\varepsilon>0)$ 所圍成的 B 的子區域. 則曲綫 $\omega_\nu(z)=1-\varepsilon$ 在 B_ε 內的調和測度顯然由

$$\omega_\nu(z,\ \varepsilon)=\frac{\omega_\nu(z)-\varepsilon}{1-2\varepsilon}$$

給出. 因爲 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 在 B_ε 的邊界上有定義而且連續, 由(12)我們有

$$\iint_{B_\varepsilon}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \omega_\nu(z,\ \varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \omega_\nu(z,\ \varepsilon)}{\partial y}\right]d\omega=0.$$

所以

$$\iint_{B_\varepsilon}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \omega_\nu}{\partial y}\right)d\omega=0.$$

令 ε 趨向於 0, 我們獲得 $D\{\varphi,\omega_\nu\}=0$.

現在讓我們重新考慮 $\varphi \in \Lambda^2(B)$ 且其共軛函數 ψ 可能是多值的一般情形. 因爲狄里希萊積分 $D\{\varphi, \psi\}$ 僅與 φ 和 ψ 的微商有關, 且我們希望把 $D\{\varphi, \varphi\}$ 就範化, 使其當且僅當 φ 恆等於 0 時才等於零, 我們必須置一附加的就範化條件於函數族 $\Lambda^2(B)$. 這個可以用若干方法完成之, 此處選擇一個便於引向最簡單的公式的方法, 但它有着不能在共形變換下保持不變性的缺點.

在 $\varphi(z)$ 具有連續邊界值的情形, $\varphi(z)$ 將以條件

$$\int_b \varphi(z)ds_z=0 \tag{13}$$

就範化. 若此積分無定義, 則(13)將以

$$D\{N(z,\zeta_0),\varphi\}=2\pi\varphi(\zeta_0) \tag{14}$$

代替之. 這裏$N(z,\zeta_0)$爲B的奈依曼函數, 以固定點$\zeta_0(\zeta_0\in B)$爲其奇點. 當(13)有定義時,此二條件是等價的,因爲按格林公式

$$D\{N(z,\zeta),\varphi\}=-\int_b\varphi\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial n_z}ds_z+\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\varphi\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial n_z}ds_z,$$

這裏C_r爲圓周$|z-\zeta|=r$, 所以

$$D\{N(z,\zeta),\varphi\}=-\frac{2\pi}{l}\int_b\varphi ds_z+2\pi\varphi(\zeta)=2\pi\varphi(\zeta).$$

以前曾經證明, 對於任意的$\varphi\in\Lambda^2(B)$, $\varphi(z)+i\psi(z)$可表爲F_ν的一綫性組合加上一個單值函數. 因此

$$\varphi(z)=\mathrm{Re}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\int^z g_\nu(t)dt+\sum_{\nu=1}^{p-1}\mu_\nu F_\nu(z)\right\},$$

這裏$g(t)\in l^2(B)$.

我們若將$\int^z g_\nu(t)dt$的實部與虛部分出

$$\int^z g_\nu(t)dt=\varphi_\nu(z)+i\psi_\nu(z),$$

且選擇積分常數使得$\varphi_\nu\in\Lambda^2$, $\psi_\nu\in\Lambda^2$, 則將有關係式

$$\begin{aligned}J_B(g_\nu,\bar{g}_\mu)&=D\{\varphi_\nu,\varphi_\mu\}-iD\{\varphi_\nu,\psi_\mu\}=\\&=D\{\psi_\nu,\psi_\mu\}+iD\{\psi_\nu,\varphi_\mu\}=\delta_{\nu\mu}.\end{aligned}$$

因爲任一單值調和函數必爲一個具有虛周期的解析函數的實部,那末顯然,聯合函數$\varphi_1,\psi_1,\varphi_2,\psi_2,\cdots$以及函數$\omega_\nu(\nu=1,\cdots,p-1)$可以作成$\Lambda^2(B)$之一封閉系, 因爲$\mu_\nu$都是實數, 在作成此系時並不必須應用函數$\tilde{\omega}_\nu$. 我們只需來就範直交化$\omega_\nu,\nu=1,\cdots,p-1$.

由核函數$\tilde{K}_B(z,\bar{\zeta})$的收斂性我們得出調和核函數

$$\begin{aligned}k_B(z,\zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\{\varphi_\nu(z)\varphi_\nu(\zeta)+\psi_\nu(z)\psi_\nu(\zeta)\}+\\+\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}\omega_\nu(z)\omega_\mu(\zeta)\end{aligned}$$

的收斂性. 這裏$C_{\nu\mu}$爲將ω_ν就範直交化所產生的常數, 而$C_{\nu\mu}=C_{\mu\nu}$. $k_B(z,\zeta)$具有性質

$$k_B(z, \zeta)=k_B(\zeta, z), \tag{15}$$

$$\varphi(z)=D\{k_B(z, \zeta), \varphi(\zeta)\}, \qquad \varphi \in \Lambda^2, \tag{16}$$

這表徵出它的唯一性.

因此

$$k \equiv k_B(z, \zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z)\varphi_\nu(\zeta) \tag{17}$$

對於 Λ^2 中任一封閉直交系 $\{\varphi_\nu\}$ 成立,而核函數僅僅依賴於區域 B.

由恆等式

$$D\{k+\varphi\}=D\{k\}+2D\{k, \varphi\}+D\{\varphi\}$$

及(16)推出函數

$$m(z, \zeta)=\frac{k(z, \zeta)}{k(\zeta, \zeta)}$$

是 $\Lambda^2(B)$ 內所有滿足條件 $\varphi(\zeta)=1$ 的調和函數中使狄里希萊積分 $D\{\varphi\}$ 的值成爲最小的函數.

3. 格林函數與奈依曼函數的表示

本節中我們將證明核函數 $k(z, \zeta)$,格林函數 $G(z, \zeta)$ 以及奈依曼函數是由簡單的關係式

$$k(z, \zeta)=\frac{1}{2\pi}[N(z, \zeta)-G(z, \zeta)] \tag{18}$$

聯繫的.

(18)的右邊代表一個 $\Lambda^2(B)$ 內的調和函數, 如果能够證明這個函數具有核函數的特徵性質(16),則恆等式(18)將被建立. 因此, 我們下一步的工作就在於對所有的 $\varphi(z) \in \Lambda^2$ 來計算純量積 $D\{N(z, \zeta), \varphi\}$ 及 $D\{G(z, \zeta), \varphi\}$.

若 $\varphi(z)$ 具有連續邊界值,則由(14)我們有

$$D\{N(z, \zeta), \varphi(z)\}=2\pi\varphi(\zeta), \tag{19}$$

對每一 $\zeta \in B$. 同樣,若 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 在 b 上連續

$$D\{G(z,\zeta), \varphi(z)\}=-\int_b G(z, \zeta)\frac{\partial \varphi}{\partial n}ds_z+$$

$$+\lim_{r \to 0}\int_{C_r} G(z, \zeta)\frac{\partial \varphi}{\partial n}ds_z,$$

這裏 C_r 爲圓周 $|z-\zeta|=r$. 因爲 $G(z, \zeta)$ 在 b 上等於 0, 且第二個積分顯然趨向於 0, 我們有

$$D\{G(z, \zeta), \varphi(z)\}=0. \tag{20}$$

若 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 在 b 上不連續, 我們亦能證明(20)成立. 爲此我們只須用由階層曲綫 $G(z, \zeta)=\varepsilon$ 圍成的區域 B_ε 來逼近 B, 且以證明(12)同樣的方式來進行之.

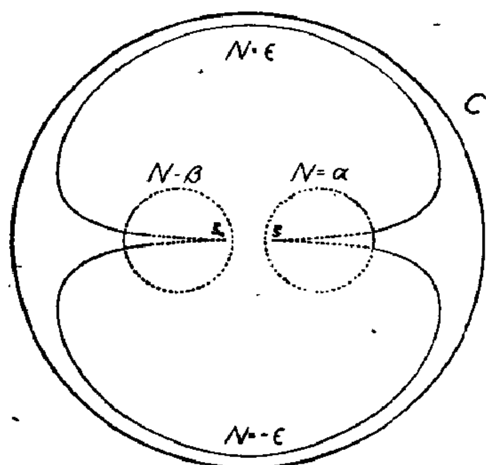


圖 2[1)]

對於 $\Lambda^2(B)$ 內不在 b 上連續的函數 $\varphi(z)$, (19)式的證明較爲困難, 因而我們把它詳細寫出. 由族 $\Lambda^2(B)$ 的定義, (14) 對固定的點 $\zeta_0\in B$ 成立. 所以, 如果我們證明了

$$D\{N(z, \zeta)-N(z, \zeta_0), \varphi(z)\}=2\pi[\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)], \tag{21}$$

則(19)式將得證. 函數

$$N\equiv N(z; \zeta, \zeta_0)=N(z, \zeta)-N(z, \zeta_0)$$

顯然有在 b 上等於零的法微商. 雖然 $N(z; \zeta, \zeta_0)$ 的共軛調和函數 $\tilde{N}(z; \zeta, \zeta_0)$在圍繞點 ζ, ζ_0 時具周期 $\pm 2\pi$, 它沿邊界曲綫 b 是沒有周期的. 更有進者, 在每一 $b_\nu(\nu=1, \cdots, p)$上, $\tilde{N}$ 爲常數, 姑記之爲 c_ν: $\tilde{N}=c_\nu$.

當N由 $-\infty$ 變到 $+\infty$ 時, 階層曲綫 $\tilde{N}=c_\nu\pm\varepsilon$ 由 ζ_0 出發, 逼近邊界 b_ν 的一部分而以 ζ 爲終點. 這樣我們看到, 我們可以用四段階層曲綫

$$\begin{aligned}
&\tilde{C}_{\varepsilon,\nu}: && \tilde{N}=c_\nu+\varepsilon, && \alpha_\nu\leqslant N\leqslant\beta_\nu,\\
&C_{\varepsilon,\nu}: && N=\beta_\nu, && c_\nu-\varepsilon\leqslant\tilde{N}\leqslant c_\nu+\varepsilon,\\
&\tilde{C}_{\varepsilon,\nu+p}: && \tilde{N}=c_\nu-\varepsilon, && \alpha_\nu\leqslant N\leqslant\beta_\nu,\\
&C_{\varepsilon,\nu+p}: && N=\alpha_\nu, && c_\nu-\varepsilon\leqslant\tilde{N}\leqslant c_\nu+\varepsilon
\end{aligned}$$

來包圍邊界 b_ν. 這裏 α_ν 小於N在 b_ν 上的最小值, 而 β_ν 大於N在

1) 在這個圖中, 方程 "$N=\varepsilon$" 和 "$N=-\varepsilon$" 將是 "$\tilde{N}=\varepsilon$" 和 "$\tilde{N}=-\varepsilon$".

b_ν 上的最大值．以 $\tilde{C}_\varepsilon$ 及 C_ε 分別記曲綫 $\tilde{C}_{\varepsilon,i}$ 及 $C_{\varepsilon,i}$ 之全體，我們得到在 B 內以 $\tilde{C}_\varepsilon$ 及 C_ε 爲邊界的漸近區域 B_ε（參看圖 2，那裏 $\tilde{C}_\varepsilon$ 和 C_ε 皆以實綫標出）．這樣我們有

$$\iint_B\left[\frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]dxdy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{B_\varepsilon}\left[\frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]dxdy=$$

$$=2\pi\,[\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)]-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\varphi\frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial n}ds-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\tilde{C}_\varepsilon}\varphi\frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial n}ds.$$

當 $z\in\tilde{C}_\varepsilon$，$\dfrac{\partial N}{\partial n}=-\left(\dfrac{\partial\tilde{N}}{\partial s}\right)=0$．當 $z\in C_\varepsilon$，因爲 C_ε 上的點與 b 之距離有一正的最小值，所以

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\varphi\frac{\partial N}{\partial n}ds\right|\leqslant M\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{\partial\tilde{N}}{\partial s}ds\right|=4Mp\varepsilon,$$

這樣當 $\varepsilon\to 0$，我們得到恆等式(21)．這就完成了(19)的證明．

結合(19)及(20)我們得到

$$D\left\{\frac{1}{2\pi}[N(z,\zeta)-G(z,\zeta)],\varphi(z)\right\}=\varphi(\zeta),\tag{22}$$

這證明了函數

$$\frac{1}{2\pi}[N(z,\zeta)-G(z,\zeta)]$$

具有核函數的特徵性質而恆等式(18)得證．

恆等式(18)指出，勢論的第一和第二邊值問題可藉核函數之助得到解決．第一邊值問題（狄里希萊問題）在於尋求在 B 內的調和函數，在 b 上取給定的邊值 $u(\zeta)$（$\zeta\in b$），按格林公式，此問題的解 $u(z)$ 有形式

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_b u(\zeta)\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta.$$

由(18)，在 b 上我們有

$$\frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}=$$

$$=\frac{1}{l}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}\qquad(\zeta\in b).$$

所以

$$u(z)=-\int_b u(\zeta)\frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta+\frac{1}{l}\int_b u(\zeta)ds_\zeta.\qquad(23)$$

在邊值函數滿足簡單條件 $\int_b u(\zeta)d\zeta=0$ 的情形，我們有

$$u(z)=-\int_b u(\zeta)\frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta.\qquad(24)$$

類似地我們可以解決第二邊值問題（奈依曼問題）。這個問題在於尋求在 B 內調和的函數 $u(z)$，其法微商 $\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta}$ $(\zeta\in b)$ 在 b 上取給定的值。我們注意，按高斯定理，此給定的值必須滿足條件

$$\int_b\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta=0.$$

由格林公式推知，奈依曼問題之一個解由

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_b\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta}N(z,\zeta)ds_\zeta\qquad(25)$$

給出。必須注意，奈依曼問題的條件僅僅確定 $u(z)$ 有可加常數項。在解(25)中，此常數顯然已如此選擇，使得 $u(z)$ 在 $\Lambda^2(B)$ 內。

奈依曼問題亦可藉核函數之助而得解決。由(18)，對 $\zeta\in b$ 我們有

$$k(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}N(z,\zeta).$$

以此代入(25)，我們得

$$u(z)=\int_b\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta}k(z,\zeta)ds.\qquad(26)$$

這樣我們看到，當核函數 $k(z,\zeta)$ 已知時，狄里希萊問題與奈依曼問題都能獲得解決。

作爲(23)之一個應用，我們得到調和測度 $\omega_\nu(z)$ 通過核函數的表達式。我們有

$$\omega_\nu(z)-\frac{l_\nu}{l}=-\int_{b_\nu}\frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta, \tag{27}$$

這裏 l_ν 爲 b_ν 的長度.

(27) 可以應用在本章 §1 中定義的第一類函數 $F_\nu(z)$ 的微商公式的推導.

設 $k^*(z, \zeta)$ 爲 $k(z, \zeta)$ 對於 ζ 的共軛調和函數. 由柯西-黎曼方程及(27), 我們有

$$\omega_\nu(z)-\frac{l_\nu}{l}=\int_{b_\nu}\frac{\partial k^*(z,\zeta)}{\partial s_\zeta}ds_\zeta=\int_{b_\nu}dk^*(z,\zeta).$$

因爲 $k(z, \zeta)$ 在 B 內是單值的, 我們有

$$\int_{b_\nu}dk(z,\zeta)=0.$$

所以

$$\omega_\nu(z)-\frac{l_\nu}{l}=\int_{b_\nu}d(k^*(z,\zeta)+ik(z,\zeta))=$$

$$=i\int_{b_\nu}d(k(z,\zeta)-ik^*(z,\zeta)).$$

顯然, $k(z, \zeta)-ik^*(z, \zeta)$ 爲 $\bar{\zeta}$ 的解析函數. 故

$$\omega_\nu(z)-\frac{l_\nu}{l}=i\int_{b_\nu}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}(k(z,\zeta)-ik^*(z,\zeta))d\bar{\zeta}=2i\int_{b_\nu}\frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}d\bar{\zeta}.$$

應用運算子 $\frac{\partial}{\partial z}$, 我們最後得到

$$F'_\nu(z)=4i\int_{b_\nu}\frac{\partial^2 k(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar{\zeta}}d\bar{\zeta}. \tag{28}$$

作爲公式(23)的第二個應用, 我們通過核函數來推導格林函數的一個表達式. 應用(23)於調和函數 $G(z, \zeta)+\log|z-\zeta|$, 我們得

$$G(z,\zeta)+\log|z-\zeta|=-\int_b\log|\zeta-t|\frac{\partial k(z,t)}{\partial n_t}ds_t+$$

$$+\frac{1}{l}\int_b\log|\zeta-t|ds_t.$$

這也可以寫爲

$$G(z, \zeta)=\log\frac{1}{|z-\zeta|}+\lambda(\zeta)+D\left\{k(z,t), \log\frac{1}{|t-\zeta|}\right\},$$

這裏

$$\lambda(\zeta)=\frac{1}{l}\int_b \log|\zeta-t|ds_t.$$

在這一節的結尾,我們來推導若干聯繫函數 $G(z,\zeta), N(z,\zeta)$, $k(z, \zeta)$, $K(z, \bar{\zeta})$ 以及 $\tilde{K}(z, \bar{\zeta})$ 的有趣的恆等式. 在 § 2 的開始我們曾藉函數族 $l^2(B)\subset \mathfrak{L}^2(B)$ 的封閉直交系 $\{g_\nu(z)\}$ 來定義核函數 $\tilde{K}(z, \bar{\zeta})$. 我們曾求得,若

$$\int^z g_\nu(t)dt=\varphi_\nu(z)+i\psi_\nu(z), \qquad \nu=1, 2, \cdots,$$

則 $k(z, \zeta)$ 由

$$k(z, \zeta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\{\varphi_\nu(z)\varphi_\nu(\zeta)+\psi_\nu(z)\psi_\nu(\zeta)\}+ \\ +\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1} C_{\nu\mu}\omega_\nu(z)\omega_\mu(\zeta) \tag{29}$$

給出. 現在我們有

$$\varphi_\nu(z)\varphi_\nu(\zeta)+\psi_\nu(z)\psi_\nu(\zeta)=\frac{1}{2}\left[\int^z g_\nu(t)dt\cdot\overline{\int^\zeta g_\nu(t)dt}+\right. \\ \left.+\overline{\int^z g_\nu(t)dt}\cdot\int^\zeta g_\nu(t)dt\right], \qquad \nu=1, 2, \cdots.$$

因此我們可將基本恆等式(18)寫爲形式

$$\frac{1}{2\pi}[N(z,\zeta)-G(z,\zeta)]=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\int^z g_\nu(t)dt\cdot\overline{\int^\zeta g_\nu(t)dt}+\right. \\ \left.+\overline{\int^z g_\nu(t)dt}\cdot\int^\zeta g_\nu(t)dt\right]+\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1} C_{\nu\mu}\omega_\nu(z)\omega_\mu(z). \tag{30}$$

分別對 z, $\bar{z}$ 及 $\bar{\zeta}$ 微分(30),我們可以得到恆等式. 回憶運算子 $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ 的定義,按柯西-黎曼方程,我們有

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial^2 N}{\partial z\ \partial\zeta}-\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\zeta}\right]=\frac{\partial^2 k(z,\zeta)}{\partial z\partial\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[g_\nu(z)\frac{\partial}{\partial\zeta}\overline{\int^{\zeta}g_\nu(t)dt}+g_\nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\overline{\int^{z}g_\nu(t)dt}\right]+$$

$$+\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}\frac{\partial\omega_\nu(z)}{\partial z}\frac{\partial\omega_\mu(\zeta)}{\partial\zeta}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)F'_\mu(z). \tag{31}$$

這樣，上面給出的格林函數與奈依曼函數的二級微商僅僅相差一個由第一類函數的微商 $F'_1, \cdots, F'_{p-1}$ 作成的二次形式。同樣，按 $\widetilde{K}(z,\bar{\zeta})$ 的定義，我們求得

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial^2 N}{\partial z\ \partial\bar{\zeta}}-\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\bar{\zeta}}\right]=\frac{\partial^2 k(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar{\zeta}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}g_\nu(z)\overline{g_\nu(\zeta)}+\frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}=$$

$$=\frac{1}{2}\widetilde{K}(z,\bar{\zeta})+\frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}. \tag{32}$$

這樣我們看到，核函數 $\widetilde{K}$ 和 k 是緊密地關聯着的；我們將在下面對 K 導出一個類似的關係式。

我們曾在第一節的結尾指出，附加函數 $F'_1, \cdots, F'_{p-1}$ 於族 $l^2(B)$ 的結果得出族 $\mathfrak{L}^2(B)$。設 $g(z)$ 爲 $l^2(B)$ 內任一函數，且置

$$\int^z g(z)dz=\varphi(z)+i\psi(z),$$

那末

$$J(g,\overline{F}'_\nu)=\iint_B\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]\frac{\partial\omega_\nu}{\partial x}+i\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\frac{\partial\omega_\nu}{\partial y}\right\}d\omega=$$

$$=\iint_B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial y}\right)d\omega+$$

$$+i\iint_B\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial y}\right)d\omega=$$

$$=D\{\varphi,\omega_\nu\}+iD\{\psi,\omega_\nu\}. \tag{33}$$

從§2關係式(12)我們有

$$D\{\varphi,\omega_\nu\}=D\{\psi,\omega_\nu\}=0,$$

因而

$$J(g,\overline{F}'_\nu)=0,\qquad g\in l^2(B),\quad \nu=1,\cdots,p-1.$$

這樣，爲了獲得族 $\mathfrak{L}^2(B)$ 的一個封閉直交系，我們僅需直交化 $F'_1,\cdots,F'_{p-1}$ 而將其結果附加到函數系 $\{g_\nu(z)\}$.

按照在(33)中應用的手續，我們得到

$$J(F'_\nu,\overline{F}'_\mu)=D\{\omega_\nu,\omega_\mu\}+iD\{\overline{\omega}_\nu,\omega_\mu\}.$$

依格林定理和柯西-黎曼方程，

$$D\{\overline{\omega}_\nu,\omega_\mu\}=-\int_b\omega_\mu\frac{\partial\overline{\omega}_\nu}{\partial n}ds=\int_b\omega_\mu\frac{\partial\omega_\nu}{\partial s}ds,$$

因爲 ω_ν 在 b 的每一組成部分上爲常數，故後一表達式爲零．所以

$$J(F'_\nu,\overline{F}'_\mu)=D\{\omega_\nu,\omega_\mu\}.$$

因此，應用格蘭姆-施密特手續於函數 $F'_\nu(z)$ 而得到的直交化常數與相對於狄里希萊積分我們將調和測度 $\omega_1,\cdots,\omega_{p-1}$ 直交化所得到的常數相同．就範直交化的調和測度的核等於

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}\omega_\nu(z)\omega_\mu(\zeta).$$

因而就範直交化的函數 $F'_\nu(z)$ 的核是

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}.$$

由此推出，核函數 $K(z,\overline{\zeta})$ 和 $\tilde{K}(z,\overline{\zeta})$ 以恆等式

$$K(z,\overline{\zeta})=\tilde{K}(z,\overline{\zeta})+\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}. \qquad (34)$$

關聯着．結合(32)及(34)，我們得到

$$\frac{\partial^2k(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}}=\frac{1}{2}K(z,\overline{\zeta})-\frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}. \qquad (35)$$

在結束這一節時我們願意指出，除了產生族 $\Lambda^2(B)$ 的就範化以外，引進其它的就範化也可能是有益的．它們在有些情形之下使得我們的結果能够比較容易地表述出來．

設 ζ_0 爲 B 之一點．我們引進滿足條件

$$D\{\varphi, \varphi\} < \infty,$$
$$\varphi(\zeta_0) = 0$$

的調和函數族 $\Lambda_0^2(B)$. 讀者可以沒有困難地驗證, 族 $\Lambda_0^2(B)$ 的核函數 $k_0(z, \zeta)$ 以恆等式

$$k_0(z, \zeta) = k(z, \zeta) - k(\zeta, \zeta_0) = k(\zeta, z) - k(\zeta, \zeta_0) \quad (36)$$

與族 $\Lambda^2(B)$ 的核函數 $k(z, \zeta)$ 聯繫着. 我們注意, 與 $k(z, \zeta)$ 相反, 核函數 $k_0(z, \zeta)$ 在共形映照下是不變的. 在第 VIII 章 § 1 中我們將回轉到這個核函數.

4. 有關核函數的進一步的等式

將格林定理通過微分算子

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

表述出來是有用的. 設 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是實變數 x 與 $y(z = x + iy)$ 的複函數, 它們都在 $B + b$ 上連續且在 B 內具有一級連續偏微商, 則

$$\iint_B f\frac{\partial g}{\partial z}d\omega = -\frac{1}{2i}\int_b fgd\bar{z} = -\iint_B g\frac{\partial f}{\partial z}d\omega, \quad (37a)$$

$$\iint_B f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}d\omega = \frac{1}{2i}\int_b fgdz - \iint_B g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\omega. \quad (37b)$$

因爲這兩個公式是等價的, 我們可以僅限於證明(37a).

取 $u = f\cdot g$, (37a)可以寫爲

$$\iint_B \frac{\partial u}{\partial z}d\omega = -\frac{1}{2i}\int_b ud\bar{z}.$$

我們來計算上式的左邊. 按格林定理

$$\iint_B \frac{\partial u}{\partial z}d\omega = \frac{1}{2}\iint_B\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\omega = \frac{1}{2}\int_b (udy + iudx) =$$
$$= -\frac{1}{2i}\int u(dx - idy) = -\frac{1}{2i}\int ud\bar{z}.$$

我們現在將建立 B 的核函數與格林函數之間的關係式

$$K(z, \bar{\zeta}) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(z, \zeta)}{\partial z\,\partial\zeta}, \quad (38)$$

因爲在 B 經過共形映照之後, (38) 的右邊服從與核函數相同的變

換規律，我們只須就解析曲綫圍成的區域來證明(38)．因爲任一單葉有限連通區域可以映照於另一由解析曲綫圍成的單葉區域．事實上，若 $b_1, \cdots, b_p$ 爲 b 的組成部分，我們首先映照 B 的外邊界——不妨設爲 b_1——的內部於一圓周的外部．這個映照將曲綫 $b_2, \cdots, b_p$ 映照爲曲綫 $b_2', \cdots, b_p'$．我們現在映照 b_2' 的外部於一圓周的內部．區域 B 在這兩次映照之下的像的邊界至少有二個解析的組成部分，它們就是相應於 b_1 和 b_2 的那兩部分．繼續這個步驟，結果我們得到 B 的一個共形映照，其像域由解析曲綫圍成．因此在證明(38)時，我們可以假定 B 由解析曲綫圍成，而不失普遍性．

考慮積分

$$I(z)=\iint_B \frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar{\zeta}} f(\zeta)d\omega,$$

這裏 $f(\zeta)$ 爲 $\mathfrak{L}^2(B)$ 中任一具有連續邊值的函數．在運算子 $\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{\zeta}}$ 作用下，函數 $G(z,\zeta)$ 的奇點消失，因而 $I(z)$ 有意義．以 B_ε 記從 B 除去小圓 $|\zeta-z|<\varepsilon$ 後所得的區域，而以 b_ε 記其邊界．由(37b)，我們有

$$I(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{B_\varepsilon} \frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\,\partial\zeta} f(\zeta)d\omega=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2i}\int_{B_\varepsilon} \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z} f(\zeta)d\zeta-\iint_{B_\varepsilon}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta}d\omega\right].$$

因爲 B 的邊界 b 係由解析曲綫組成，且 $G(z,\zeta)$ 在 b 上爲零，$G(z,\zeta)$ 在 b 上調和；因而在該處具有各級微商．因此，在計算 $I(z)$ 時應用(37b)是合法的．因爲 $\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}$ 按柯西-黎曼方程等於零．我們求得

$$I(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2i}\int_b \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z} f(\zeta)d\zeta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2i}\int_{|\zeta-z|=\varepsilon} f(\zeta)\left\{\frac{1}{2(\zeta-z)}+H(z,\zeta)\right\}d\zeta\right],$$

這裏 $H(z,\zeta)$ 爲一有界函數．因爲

$$G(z, \zeta) \equiv 0, \qquad \zeta \in b, z \in B,$$

我們有

$$\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z} \equiv 0, \qquad \zeta \in b.$$

因此

$$\int_b \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z} f(\zeta) d\zeta$$

等於零．這樣

$$I(z) = \iint_B \frac{\partial^2 G(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} f(\zeta) d\omega = -\frac{\pi}{2} f(z),$$

這指明了

$$-\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}$$

相對於函數 $f(z) \in \mathfrak{L}^2(B)$ 具有核函數的再生性質．現在可得出恆等式(38)．因爲按 § 3, (35) $f(\zeta) = K(\zeta, \bar{t})$在 b 上連續，而我們有

$$\iint_B \left(-\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}\right) K(\zeta, \bar{t}) d\omega = K(z, \bar{t}).$$

另一方面，由 $K(z, \bar{t})$的再生性質

$$\iint_B K(t, \bar{\zeta}) \left(-\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(\zeta, z)}{\partial \zeta \partial \bar{z}}\right) d\omega = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(t, z)}{\partial t \partial \bar{z}}.$$

但顯然

$$\iint_B \left(-\frac{2}{\pi} \overline{\frac{\partial^2 G(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}}\right) \overline{K(\zeta, \bar{t})} d\omega =$$

$$= \iint_B K(t, \bar{\zeta}) \left(-\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(\zeta, z)}{\partial \zeta \partial \bar{z}}\right) d\omega,$$

因而

$$K(z, \bar{t}) = -\frac{2}{\pi} \overline{\frac{\partial^2 G(t, z)}{\partial t \partial \bar{z}}} = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(z, t)}{\partial z \partial \bar{t}}.$$

對於族 $l^2(B)$的核函數可獲得一類似的公式．事實上，將(38)代入(35)(§ 3)，我們有

$$\frac{\partial^2 k(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2 G(z, \zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} - \frac{1}{4} \sum_{\nu, \mu = 1}^{p-1} C_{\nu\mu} F'_{\nu}(z) \overline{F'_{\mu}(\zeta)}.$$

與(18)相結合，給出

$$\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar\zeta}+\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar\zeta}+\sum_{\mu,\nu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}=0. \qquad (39)$$

再一次應用(38)及(34)(§3)，我們最後得到

$$\tilde{K}(z,\bar\zeta)=\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z\,\partial\zeta}. \qquad (40)$$

作爲(38)的一個應用，我們來證明公式

$$F'_\nu(z)=i\int_{b_\nu}K(z,\bar\zeta)d\bar\zeta. \qquad (41)$$

從(7)(§1)，我們有

$$\omega_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta.$$

由於在(28)的推導中用過的一個變換，我們亦可寫成

$$\omega_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial\bar\zeta}d\bar\zeta.$$

施行運算 $\frac{\partial}{\partial z}$，我們獲得(41)。

爲了參考的方便，我們將本章的主要結果彙集如下：

在 B 的各種區域函數中，我們有公式

$$k_B(z,\zeta)=(2\pi)^{-1}[N(z,\zeta)-G(z,\zeta)], \qquad (18)$$

$$K_B(z,\bar\zeta)=-\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar\zeta}, \qquad (38)$$

$$\tilde{K}_B(z,\bar\zeta)=\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar\zeta}, \qquad (40)$$

$$F'_\nu(z)=i\int_{b_\nu}K_B(z,\bar\zeta)d\bar\zeta, \qquad (41)$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z\partial\zeta}-\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\,\partial\zeta}\right]=\sum_{\mu,\nu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)F'_\mu(\zeta), \qquad (31)$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar\zeta}+\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar\zeta}\right]=-\sum_{\mu,\nu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}. \qquad (39)$$

Bergman 1, 26.
Bergman and Schiffer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Kellogg 12.
Schiffer 6, 9, 10.
Schottky.
Zaremba.

VI. 標準共形變換

1. 引　言

簡單的例子證明了，一般來說，一個連通數爲 $p>1$ 的簡單區域不能共形地映照於另一有同一連通數的區域． 例如[1]，當 $\rho\neq r$ 時，環 $1<|z|<r$ 不可能共形地映照到環 $1<|z|<\rho$．

因此，就產生了引進這樣的區域類的必要性，在這樣的類中，任一區域可以共形地映照於另一區域．我們也說，這些區域是共形地等價的． 爲了研究這樣的等價類，在每一類中引進具有特別簡單的幾何性質的代表區域是方便的．在多連通區域共形映照的理論中，這些代表區域所起的作用正如在邊界點多於一點的情況下圓所起的作用那樣．由於在多連通的情形不存在着具有圓的一切優點的特殊區域，我們必須考慮多種類型的區域，其中每一個具有它特殊的優點．

我們將看到，很類似於單連通的情形，將一給定區域共形映照到一代表區域的函數的實現往往可藉典型區域函數表出．這是因爲，函數的映像區域的簡單的幾何圖形導出基本區域函數所滿足的簡單邊界條件．

2. 代表區域

本節我們將證明，任一 p 連通區域可以共形地映照到下面列舉的六種標準區域中的每一個． 在證明中，我們將假定第 V 章中所討論過的區域函數的存在性．

S_1：由中心在原點的圓環割去以原點爲中心的 $p-2$ 個圓弧所組成的區域(圖 3)．

S_2：由中心在原點的圓割去以原點爲中心的 $p-1$ 個圓弧所組

1) Julia [10].

成的區域(圖 4).

S_3:由全平面割去以原點爲中心的 p 個圓弧所組成的區域(圖 5).

S_3':由全平面割去位於從原點出發的射綫上的 p 個綫段所組成的區域(圖 6).

S_4:由全平面割去與實軸平行的 p 個綫段所組成的區域(圖 7).

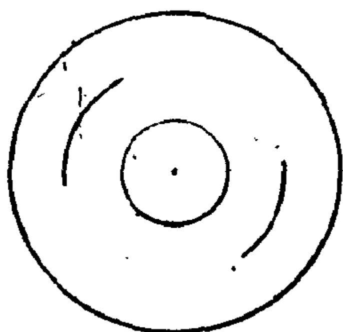


圖 3 $[S_1, A_{\nu\mu}(z)]$

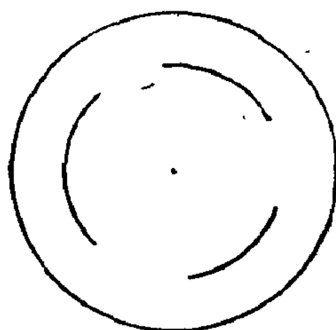


圖 4 $[S_2, E_\nu(z,\zeta)]$

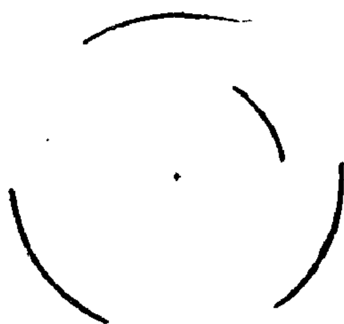


圖 5 $[S_3, p(z; u, v)]$

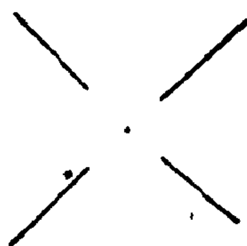


圖 6 $[S_3', q(z; u, v)]$

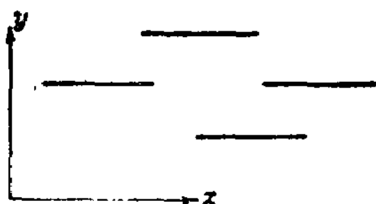


圖 7 $[S_4, \varphi(z, \zeta)]$

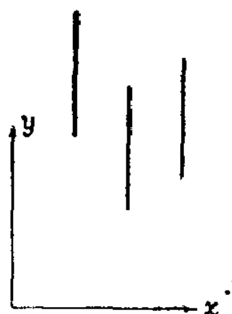


圖 8 $[S_4', \psi(z, \zeta)]$

S_4':由全平面割去與虛軸平行的 p 個綫段所組成的區域(圖 8).

我們從證明函數 $w=E_\nu(z, \zeta)$的存在性開始．這個函數映照 z 平面上一個已給的 p 連通區域B於一個 S_2 型的區域，且使邊界組成部分 b_ν[1] 變到最外的圓周而$E_\nu(\zeta, \zeta)=0$。

考慮函數

$$g_\nu(z, \zeta)=-G(z, \zeta)+\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\mu\omega_\mu(z),$$

這裏參數 λ_μ 如此選擇，使

$$\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\mu p_{\mu\kappa}=2\pi\omega_\kappa(\zeta), \qquad \kappa=1, \cdots, p-1;\ \kappa\neq\nu, \tag{1}$$

$$\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\mu p_{\mu\nu}=2\pi\omega_\nu(\zeta)+2\pi, \tag{2}$$

這裏，如通常一樣，用 $p_{\mu\nu}$ 記 $\tilde{\omega}_\mu$ 圍繞 b_ν 的周期．這樣來選擇 λ_μ 是可能的，因爲在第V章 §1 中曾證行列式 $|(p_{\mu\nu})^{(p-1)\times(p-1)}|$ 不爲零．設 $h_\nu(z, \zeta)$，看作 z 的函數，是 $g_\nu(z, \zeta)$的調和共軛．我們置

$$E_\nu(z, \zeta)=e^{g_\nu(z,\zeta)+ih_\nu(z,\zeta)}, \qquad z\neq\zeta, \quad E_\nu(\zeta, \zeta)=0.$$

我們將證，$E_\nu(z, \zeta)$即爲所需要的映照函數．

由(1)和(2)的觀察證明，函數 $E_\nu(z, \zeta)$具有下述性質：

(a) $E_\nu(\zeta, \zeta)=0$;

(b) $E_\nu(z, \zeta)$ 在B內正則單值；這可由在V，§1 上建立的結果得出，這個結果說，$G(z, \zeta)$的共軛 $H(z, \zeta)$ 圍繞 b_k 的周期爲 $2\pi\omega_k(\zeta)$．

(c) 若 z 描出邊界組成部分 $b_\kappa(\kappa\neq\nu)$，$\arg F_\nu(z, \zeta)$ 回到它原來的值，若 z 沿正方向描出 b_ν，$\arg E_\nu(z, \zeta)$增加 2π．

(d) $|E_\nu(z, \zeta)|=e^{\lambda_\kappa}=C_\kappa$, $\kappa=1, \cdots, p$; $\lambda_p=0$; $z\in b_\kappa$.

我們斷言，$E_\nu(z, \zeta)$映照B於沿着圓周 $|w|=C_\kappa$ $(\kappa\neq\nu)$上的圓弧割開的單葉圓$|w|<C_\nu$．由於性質(a)—(d)，我們僅需證明，當 $|w|<C_\nu$，$|w|\neq C_\kappa(\kappa\neq\nu)$時，$E_\nu(z, \zeta)$ 取値 w 一次且僅一次，而當$|w|>C_\nu$ 時，$E_\nu(z, \zeta)$不取 w 爲値．

---

1) p 連通區域的邊界由 p 個互不相連的連續統 $b_1, b_2, \cdots, b_p$ 構成，每一 b_ν 稱爲一"邊界組成部分"，以下將經常使用此名詞——譯者註．

我們在 B 內應用幅角原理於表達式 $[E_\nu(z,\zeta)-\alpha]$. 我們可寫

$$E_\nu(z,\zeta)-\alpha=E_\nu(z,\zeta)\left[1-\frac{\alpha}{E_\nu(z,\zeta)}\right]. \tag{3}$$

$$E_\nu(z,\zeta)-\alpha=-\alpha\left[1-\frac{E_\nu(z,\zeta)}{\alpha}\right]. \tag{4}$$

我們現在假設 $|\alpha|\neq C_\kappa$, $\kappa=1,\cdots,p$, 且計算 $\arg[E_\nu(z,\zeta)-\alpha]$ 在每一 b_κ 上的變化. 對 $\kappa\neq\nu$ 和 $|\alpha|<C_\kappa$, 由(3)和性質(c)我們求得 $\arg[E_\nu-\alpha]$ 在 b_κ 上的全變化爲零. 若 $|\alpha|>C_\kappa$, 則應用(4)來代替(3)亦可得到同樣結果. 對於 $\kappa=\nu$, 分別應用(3)或(4)及性質(c)證明, 若 $|\alpha|<C_\nu$, 則 $\arg[(E_\nu-\alpha)]$ 在 b_ν 上的變化等於 2π. 若 $|\alpha|>C_\nu$, 則此變化爲零. 由此推知, 按照 $|\alpha|<C_\nu$ 或 $|\alpha|>C_\nu$, $\arg[(E_\nu-\alpha)]$ 在 B 的整個邊界上的全變化爲 2π 或 0. 所以依幅角原理, 對於每個値 α, $|\alpha|<C_\nu$, $|\alpha|\neq C_\kappa$, 函數 $E_\nu(z,\zeta)$ 在 B 內剛好取一次, 而當 $|\alpha|>C_\nu$ 時函數 $E_\nu(z,\zeta)$ 在 B 內根本不取 α 爲値. 僅對 $|w|=C_\kappa$ 的値 w 方有可能在 B 內取多於一次. 然而, 如果存在 B 內的二點 z_1 和 z_2, 使 $E_\nu(z_1,\zeta)=E_\nu(z_2,\zeta)$, 則由此推出, 分別存在着 z_1 和 z_2 的鄰域, 它們在共形映照 $E_\nu(z,\zeta)$ 之下的像互相交疊. 所以, $E_\nu(z,\zeta)$ 在 B 內單葉而且產生一個映 B 於 S_2 型區域的共形映照. 容易看出, 除開一個常數因子以外, 這個映照是唯一的.

我們現在過渡到函數 $A_{\nu\mu}(z)$ 和 $p(z;u,v)$, $u\neq v$, 它們分別實現映 B 於一 S_1 型及 S_2 型區域的映照. 這個映照可以用與上面應用於函數 $E_\nu(z,\zeta)$ 的情形相類似的方式從格林函數及調和測度作出. 不過置

$$A_{\nu\mu}(z)=\frac{E_\nu(z,\zeta)}{E_\mu(z,\zeta)} \tag{5}$$

及

$$p(z;u,v)=\frac{E_\nu(z,u)}{E_\nu(z,v)} \tag{6}$$

而驗證這些函數具有所需的性質是較爲容易的.

$|A_{\nu\mu}(z)|$ 和 $|p(z;u,v)|$ 顯然都在每一邊界部分 b_ν, $\nu=1,\cdots,p$

上爲常數．其次，$A_{\nu\mu}(z)$在B內沒有零點或極點，而$p(z;\ u,\ v)$在$z=u$處有一簡單零點，在$z=v$處有一簡單極點．

恰如上面一樣，應用幅角原理可以證明，函數$A_{\nu\mu}(z)$和$p(z;\ u,\ v)$皆爲單葉，且它們分別實現映B於S_1型及S_2型區域的映照．在函數$A_{\nu\mu}(z)$的情形，邊界部分b_ν將被映照到S_1的外圓周而b_μ將被映照到S_1的內圓周．除去一個常數因子外，這些映照都是唯一確定的，我們把證明的細節留給讀者作爲一個練習．

我們現在轉向於函數$q(z;\ u,\ v)$，它實現映B於一S_3'型區域的共形映照．

考慮函數

$$N(z;\ u,\ v)=N(z,\ v)-N(z,\ u),$$

這裏$N(z,\ \zeta)$爲B的奈依曼函數．因爲$N(z,\ \zeta)$的法微商的常數值與ζ無關，函數$N(z;\ u,\ v)$將有一等於零的法微商．因此若以$\tilde{N}(z;\ u,\ v)$記$N(z;\ u,\ v)$的共軛調和函數，則由

$$0=\frac{\partial N}{\partial n}=-\frac{\partial \tilde{N}}{\partial s}$$

在每一邊界連續統b_ν上我們將有$N(z;\ u,\ v)=\gamma_\nu=\text{const}.$因此，$\tilde{N}(z;\ u,\ v)$對於邊界$b_1,\cdots,b_p$是沒有周期的．然而，它對於環繞點$z=u$及$z=v$的綫路分別具有內周期$2\pi$及$-2\pi$．結果，函數

$$q(z;\ u,v)=e^{-Q(z;u,v)},$$

$$[Q(z;u,v)=N(z;u,v)+i\tilde{N}(z;u,v)],$$

在B內單值且在邊界連續統b_ν上具有常數幅角值．$q(z;\ u,\ v)$在B內除去簡單極點$z=v$外是正則的，且在$z=u$處有一零點．爲了證明函數$q(z;\ u,\ v)$實現所希望的映照，我們仍應用幅角原理．

設α爲一複數，其幅角異於$\gamma_1,\ \cdots,\gamma_p$．顯然

$$\arg\ [q(z;\ u,\ v)-\alpha]$$

在每一周綫b_ν上的全變化爲零．當z在b_ν上時，不爲零的複數$q-\alpha$永遠位於由直綫$\arg\ w=\gamma_\nu$所限制的半平面內．按幅角原理，$q(z;\ u,\ v)-\alpha$在B內具有相同數目的零點和極點．由於它有一個極點，它恰好一次地取α爲值。這就完成了證明。

最後我們必須證明函數

$$\varphi(z,\zeta)=\frac{1}{z-\zeta}+a_1(z-\zeta)+\cdots \tag{7}$$

和

$$\psi(z,\zeta)=\frac{1}{z-\zeta}+b_1(z-\zeta)+\cdots \tag{8}$$

的存在性．它們分別將B映照於S_4型與S_4'型的區域．我們置

$$\zeta=\xi+i\eta,$$

$$N(z;\zeta,v)=\beta_\nu(z,\zeta,v),\qquad z\in b_\nu, \tag{9}$$

$$\tilde{N}(z;\zeta,v)=\gamma_\nu(\zeta,v),\qquad z\in b_\nu.$$

用這種記號，我們有

$$\varphi(z,\zeta)=-\frac{\partial}{\partial\xi}[\log q(z;\zeta,v)], \tag{10}$$

$$\psi(z,\zeta)=i\frac{\partial}{\partial\eta}[\log q(z;\zeta,v)]. \tag{11}$$

事實上，由(9)，對$z\in b_\nu$我們有

$$\varphi(z,\zeta)=-\frac{\partial}{\partial\xi}[N+i\tilde{N}]=-\frac{\partial}{\partial\xi}[\beta_\nu(z;\zeta,v)+i\gamma_\nu(\zeta,v)]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\xi}\beta_\nu(z,\zeta,v)-i\frac{\partial}{\partial\xi}\gamma_\nu(\zeta,v),$$

$$\psi(z,\zeta)=i\frac{\partial}{\partial\eta}[N+i\tilde{N}]=i\frac{\partial}{\partial\eta}[\beta_\nu(z;\zeta,v)+i\gamma_\nu(\zeta,v)]=$$

$$=i\frac{\partial}{\partial\eta}\beta_\nu(z;\zeta,v)-\frac{\partial}{\partial\eta}\gamma_\nu(\zeta,v).$$

所以，$\mathrm{Im}\{\varphi(z,\zeta)\}$與$\mathrm{Re}\{\psi(z,\zeta)\}$在$b_\nu$上皆爲常數．$\log q$在$z=v$處的奇異性由(10)及(11)中的微分所取消，因爲

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\log(z-\zeta)=\frac{1}{z-\zeta}$$

及

$$i\frac{\partial}{\partial\eta}\log(z-\zeta)=\frac{1}{z-\zeta},$$

(10)及(11)右邊的表達式將在$z=\zeta$處具有階數爲1的簡單極點．除去這些極點之外，$\varphi(z,\zeta)$和$\psi(z,\zeta)$都在B內正則．

這樣，爲了證實$\varphi(z, \zeta)$和$\psi(z, \zeta)$與我們所希望的映照函數相同，我們僅需證明$\varphi(z, \zeta)$和$\psi(z, \zeta)$所實現的映照皆爲單葉的．這個單葉性的證明緊隨着在函數$q(z; u, v)$的情形中所用的路綫，而我們把它留給讀者作爲一個練習．也容易證實，函數$\varphi(z, \zeta)$和$\psi(z, \zeta)$唯一地確定除了可允許的綫性變換外．

我們補充說明，在$\zeta=\infty$的情形，法式(7)及(8)成爲

$$\varphi(z, \infty)=z+\frac{a_1}{z}+\cdots \tag{12}$$

和

$$\psi(z, \infty)=z+\frac{b_1}{z}+\cdots. \tag{13}$$

我們以一關聯於映區域B於一S_1型區域的映照的偏差定理來結束這一節．由上面所說過的，容易驗證，實現這個映照的函數$A_{\nu\mu}(z)$滿足關係式

$$\log A(z)=\log A_{\nu\mu}(z)=\sum_{\tau=1}^{p-1} a_\tau F_\tau(z),$$

這裏e^{a_τ}爲邊界部分b_τ變換到的圓周或圓弧的半徑．

應用(41)(第V章)，我們得到

$$\frac{A'(z)}{A(z)}=i\sum_{\tau=1}^{p-1} a_\tau \int_{b_\tau} K(z, \bar{\zeta})d\zeta.$$

設$c_1, \cdots, c_p$爲B內的閉簡單曲綫，它們可以連續地變形於曲綫$b_1, \cdots, b_p$．於是由柯西定理，我們亦可寫成

$$\frac{A'(z)}{A(z)}=i\sum_{\tau=1}^{p-1} a_\tau \int_{c_\tau} K(z, \bar{\zeta})d\zeta.$$

由雪瓦茲不等式，我們有

$$|K(z, \bar{\zeta})|^2 \leqslant K(z, \bar{z})K(\zeta, \bar{\zeta}),$$

且由第I章§2中應用過的一個引理

$$K(z, \bar{z})\leqslant\frac{1}{\pi\delta_1^2}, \qquad K(\zeta, \bar{\zeta})\leqslant\frac{1}{\pi\delta_2^2},$$

這裏δ_1爲z到b的最小距離，而δ_2爲$\sum_{i=1}^{p} c_i$到b的最小距離．

這樣，我們得到不等式

$$\left|\frac{A'(z)}{A(z)}\right| \leqslant \frac{1}{\pi\delta_1\delta_2}\sum_{i=1}^{p-1}|a_i|l_i,$$

這裏 l_i 爲 c_i 的長度.

這個公式表達一偏差定理，此公式特別有趣的是：共形映照的偏差通過曲綫 c_i 的長度來估計的.

3. 區域 S_4 的一個極値性質

將一個已給多連通區域映照於上節所討論過的標準區域的解析函數也可以由某些極値性質來表徵之. 作爲一個例證，我們將在這一節中對區域 S_4 給出一個詳細的處理.

設 B 爲 z 平面上的一個多連通區域，而函數 $f(z)=\frac{1}{z-\zeta}+$ $+c_1(z-\zeta)+\cdots(\zeta\in B)$ 在 B 內是單葉的. 本節中我們將證

$$\operatorname{Re}\{c_1\}\leqslant\operatorname{Re}\{a_1\},$$

這裏 $\varphi(z)=\frac{1}{z-\zeta}+a_1(z-\zeta)+\cdots$ 是映 B 於一 S_4 型區域的函數.

不限制證明的普遍性，我們可以假定 B 包含點 $z=\infty$，且 $f(z)$ 在此處有極點；亦即，在 $z=\infty$ 的鄰近，$f(z)$ 有表達式

$$f(z)=z+\frac{c_1}{z}+\cdots.$$

我們可以進一步假定 B 的邊界由閉解析曲綫組成，否則我們可首先建立一函數 $z'=p(z)=z+\frac{\alpha_1}{z}+\cdots$，它映 B 於由閉解析曲綫圍成的區域 B'，然後考慮在 B' 內單葉的函數

$$f_1(z')=f(z)=z'+\frac{c_1-\alpha_1}{z'}+\cdots.$$

映 B 於 S_4 型區域的映照的極値性質顯然不會受這個變換的影響.

我們可進一步假定函數 $f(z)$ 在 B 的邊界 b 上解析，因爲否則

$f(z)$可用具有這個性質的函數 $f_\nu(z)$ 所成的敍列來逼近之[1]，而不等式 $\mathrm{Re}\{c_1^{(\nu)}\}\leqslant\mathrm{Re}\{a_1\}$ 導致不等式 $\mathrm{Re}\{c_1\}\leqslant\mathrm{Re}\{a_1\}$。

我們的證明將基於恆等式

$$\iint_B \overline{f'(z)}\, g(z)\,d\omega=\frac{1}{2i}\int_b \overline{f(z)}\, g(z)\, dz, \tag{14}$$

它對於在 B 內正則且在 b 上連續的函數 $f(z)$ 與 $g(z)$ 是正確的. (14)由在公式(37b)(第V章, §4)中將 $f(z)$及 $g(z)$分別換爲$g(z)$及$\overline{f(z)}$，且注意到由柯西-黎曼方程得出的等式 $\dfrac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}}=0$ 而推導出來的.

考慮積分

$$I=\iint_B |f'-\varphi'|^2\, d\omega. \tag{15}$$

因爲 $f'-\varphi'$ 在無限遠處具階數至少爲 2 的零點，此積分有一有限值. 顯然，我們有

$$I\geqslant 0,$$

等號當且僅當 $f'\equiv\varphi'$ 時成立.

爲了將(15)轉化爲一綫積分我們必須通過從B內除去充分大的圓周$|z|=r$ 的外部 B_r，而將點 $z=\infty$ 除去. 應用(14)，我們得到

$$I-\iint_{B_r} |f'-\varphi'|^2\, d\omega=\frac{1}{2i}\int_b \overline{(f-\varphi)}(f'-\varphi')\, dz-$$
$$-\frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{(f-\varphi)}(f'-\varphi')\, dz.$$

容易證實，當 $r\to\infty$ 時展布於 B_r 和$|z|=r$ 上的積分的值趨向

---

1) 因爲，設 c_ν 爲在B內接近於 b_ν 且與之同倫的閉曲綫，則我們可寫 $f(z)=\Sigma_{\nu=1}^{p} f_\nu(z)$，這裏 $f_\nu(z)=(1/2\pi i)\int_{c_\nu} f(t)\,dt/(z-t)$. 只要 c_ν 都是上述的類型，f_ν 與 c_ν 無關. 因此，若以 B_1 記 b_1 的內部而 $B_\nu(\nu=2,\cdots,p)$記 b_ν 的外部，則 $f_\nu(z)(\nu=1,\cdots,p)$在 B_ν 內正則. 設 $w=\psi_\nu(z)$ 爲共形映照 B_ν 於單位圓的函數，而 $z=\chi_\nu(w)$ 爲其反函數，那末對所有充分大的 n，$F_n(z)=\Sigma_{\nu=1}^{p} f_\nu[\chi_\nu(\psi_\nu(z)/(1+n^{-1}))]$ 將在 $\bar{B}$ 上正則，在 B 內單葉；且對所有的 $z\in B$，$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(z)=F(z)$.

於零，因此

$$0 \leqslant I = \frac{1}{2i}\int_b \overline{(f-\varphi)}(f'-\varphi')\,dz. \tag{16}$$

現在我們必須計算四個積分

$$J_1 = \frac{1}{2i}\int_b \bar{f}f'\,dz, \qquad J_2 = \frac{1}{2i}\int_b \bar{f}\varphi'\,dz,$$

$$J_3 = \frac{1}{2i}\int_b \bar{\varphi}f'\,dz, \qquad J_4 = \frac{1}{2i}\int_b \bar{\varphi}\varphi'\,dz.$$

我們由 J_1 開始．若 b_ν 爲一特殊的邊界曲綫，γ 爲被閉曲綫 ε_ν（$f(z)$ 映 b_ν 於 ε_ν）包圍的一點，又若對於 $z \in b_\nu$ 將 $f(z)$ 寫爲 $f = \gamma + \mathrm{R}e^{i\theta}$，我們有

$$J_{1\nu} = \frac{1}{2i}\int_{b_\nu} \bar{f}f'\,dz = \frac{1}{2i}\int \bar{f}\,df = \frac{\bar{\gamma}}{2i}\int_{b_\nu} df +$$

$$+\frac{1}{4i}\int_{b_\nu} d(R^2) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\,d\theta.$$

右邊頭兩個積分爲零，因爲 $f(z)$ 在 B 內單值．第三個積分給出 ε_ν 所包圍的面積的負值；這個負號是由於當 z 沿相對於 B 的正向變化時，面積按負的方向圍繞起來．由於面積是非負的，我們有

$$J_1 \leqslant 0. \tag{17}$$

爲了計算其它的積分，我們注意到在 b_ν 上我們有

$$\varphi(z) = \sigma(x, y) + i\delta_\nu,$$

這裏 δ_ν 皆爲實常數．因此對 $z \in b_\nu$ 有

$$\overline{\varphi(z)} = \sigma(x, y) - i\delta_\nu = \varphi(z) - 2\,i\delta_\nu. \tag{18}$$

此外，$d\varphi(z)$ 在所有的邊界曲綫上顯然都是實的．

現在轉向 J_4．我們得到

$$J_4 = \frac{1}{2i}\int_b \bar{\varphi}\varphi'\,dz = \frac{1}{2i}\int_b \varphi\varphi'\,dz - \sum_{\nu=1}^{p}\delta_\nu\int_{b_\nu}\varphi'\,dz.$$

因爲 φ' 和 $\varphi'\varphi$ 皆爲單值函數的微商，所有這些積分全爲零，因而 $J_4 = 0$．

在 J_3 的情形，由(18)及 f 爲單值的事實，我們有

$$J_3=\frac{1}{2i}\int_b \bar{\varphi}f'\,dz=\frac{1}{2i}\int_b \varphi f'\,dz-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{p}\delta_\nu\int_{b_\nu} f'\,dz=\frac{1}{2i}\int_b \varphi f'\,dz; \tag{19}$$

同樣，對於 J_2

$$J_2=\frac{1}{2i}\int_b \bar{f}\varphi'\,dz=\frac{1}{2i}\int_b \bar{f}\,d\varphi=\frac{1}{2i}\int \bar{f}\,\overline{d\varphi}=-\overline{\frac{1}{2i}\int_b f\varphi'\,dz}.$$

另一方面，我們有

$$0=\int_b d(f\varphi)=\int_b f\varphi'\,dz+\int_b \varphi f'\,dz,$$

因而

$$J_2=\overline{\frac{1}{2i}\int_b \varphi f'\,dz}.$$

將此與(19)聯合，我們得到

$$J_2+J_3=2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2i}\int_b \varphi f'\,dz\right\}.$$

後一積分可由留數定理計算之．我們有

$$\frac{1}{2i}\int_b \varphi f'\,dz=\frac{1}{2i}\int_b\left(z+\frac{a_1}{z}+\cdots\right)\left(1-\frac{c_1}{z^2}+\cdots\right)dz=\pi(c_1-a_1),$$

因而

$$J_2+J_3=2\pi\,\mathrm{Re}\,\{c_1-a_1\}.$$

將此與(16)及(17)聯合且回憶 $J_4=0$，我們最後得到

$$\mathrm{Re}\,\{c_1\}\leqslant\mathrm{Re}\,\{a_1\}. \tag{20}$$

在證明(20)的過程中，我們必須假定映照已給區域於 S_4 的函數的存在性．然而，僅僅應用單連通區域能够共形映照於圓和(20)對單連通區域成立的事實，亦可以證明(20)以及映照函數 φ 的存在性． 我們注意，映照單連通區域 S 於單位圓的可能性和映照 S 於一個由全平面割去一條與實軸平行的直綫段所成的區域的可能性是等價的． 因爲這兩映照由變換 $z'=z+\frac{1}{z}$ 聯繫着，現在假設 S 由函數 $p(z)=z+\frac{a_1}{z}+\cdots$ 映照於這個帶有割綫段的區域． 按

(20)，$\text{Re}\{a_1\}$ 較 S 的任何其它單葉映照的對應係數爲大。對於恆等映照 $w=z$，此係數爲零。結果，我們有 $\text{Re}\{a_1\}\geqslant 0$，這裏等式僅當 S 亦爲一帶有水平割綫段的區域時才成立。

我們現在考慮在多連通區域 B 內單葉的函數 $f(z)=z+\dfrac{c_1}{z}+\cdots$ 所成的族，而在此族中尋求使 $\text{Re}\{c_1\}$ 達到極大值的特殊函數 $F(z)$. 這樣的函數是存在的；因爲，由在一給定區域內就範化單葉函數所組成的族是緊緻的[1]. 現在假設 $F(z)=z+\dfrac{A_1}{z}+\cdots$ 不映照 D 於一 S_4 型的區域；那末，這個區域至少存在一個不與實軸平行的割綫段的邊界曲綫。所以，存在一個映照這曲綫的外部於沿着這樣的割綫段割開的全平面的函數 $p(z)=z+\dfrac{b_1}{z}+\cdots$. 顯然，函數

$$g(z)=p\{F(z)\}=z+\frac{A_1+b_1}{z}+\cdots=z+\frac{A_1'}{z}+\cdots$$

在 B 內單葉，正如我們曾經看到的，$\text{Re}\{b_1\}>0$. 因此

$$\text{Re}\{A_1'\}=\text{Re}\{A_1+b_1\}>\text{Re}\{A_1\},$$

這與 $F(z)$ 具有可能最大的 $\text{Re}\{c_1\}$ 的事實有矛盾．僅當 $\text{Re}\{b_1\}=0$ 時此矛盾方可避免，而這僅當問題中的邊界曲綫爲一與實軸平行之割綫段時方眞．這樣，我們不僅證明了映 B 於 S_4 的函數的極值性質，並且也證明了它的存在性．

作爲一個應用，我們考慮 B 爲單位圓外部的特殊情形。這裏 $\varphi(z)$ 形如 $\varphi(z)=z+\dfrac{1}{z}$，而(20)歸結爲 $\text{Re}\{c_1\}\leqslant 1$. 函數 $e^{i\theta}f(e^{-i\theta}z)$ 在 $|z|>1$ 時也單葉，我們也有 $\text{Re}\{c_1e^{2i\theta}\}\leqslant 1$，因而

$$|c_1|\leqslant 1.$$

這個不等式包含了單位圓內單葉函數大多數的偏差定理。

4. 用核函數表示標準映照函數的表達式

在 §3 中導出的標準映照函數的表達式有着這樣的不方便，

1) 參閱 [25, p. 200]，那裏，緊緻族的名詞是不用的。

即它們使得這些函數的有效計算依賴於格林函數、奈依曼函數、調和測度以及它們的周期的知識．本節中我們將證明，對於曾經在§3中討論過的函數存在着備擇的表達式，它們僅僅通過核函數來表達這些函數．因爲核函數可藉一封閉直交系來計算，有效的構造問題中的映照函數就成爲實際的可能了．

我們從恆等式

$$\iint_B \overline{\tilde{K}(z, \bar{\zeta})}\, g(z)\, d\omega = g(\zeta) \tag{21}$$

開始，這裏 $\tilde{K}(z, \bar{\zeta})$ 爲區域 B 相對於 $l^2(B)$ 的核函數，而 $g(z) \in l^2(B)$．現在 $g(z)$ 有一單值的不定積分，佔且稱之爲 $f(z)$，應用這個以及§3變換(14)，我們亦可將(21)寫爲

$$\frac{1}{2i}\int_b \tilde{K}(z, \bar{\zeta})\overline{f(z)}\, dz = \overline{f'(\zeta)}. \tag{22}$$

設

$$\varphi_\theta(z, \zeta) = \frac{1}{z-\zeta} + a_1(z-\zeta) + \cdots$$

爲映 B 於沿着與正軸交成 θ 角的平行綫段割開的全平面的函數．由§2的方法容易證實

$$\varphi_\theta(z, \zeta) = e^{i\theta}[\varphi(z, \zeta)\cos\theta - i\psi(z, \zeta)\sin\theta]. \tag{23}$$

顯然，$\varphi_\theta'(z, \zeta) + (z-\zeta)^{-2}$ 在 $l^2(B)$ 內．以此函數作爲(22)中的 $f'(z)$，我們得到

$$\frac{1}{2i}\int_b \tilde{K}(z, \bar{t})\overline{\varphi_\theta(z, \zeta)}\, dz - \frac{1}{2i}\int_b \frac{\tilde{K}(z, \bar{t})}{\bar{z}-\bar{\zeta}}\, dz =$$
$$= \overline{\varphi_\theta'(t, \zeta)} + \overline{(t-\zeta)^{-2}}. \tag{24}$$

邊界部分 b_ν 被 $\varphi_\theta(z, \zeta)$ 映照於與正軸交成 θ 角的割綫．所以

$$\overline{\varphi_\theta(z, \zeta)} = e^{-2i\theta}\varphi_\theta(z, \zeta) + \gamma_\nu \qquad \text{當 } z \in b_\nu,$$

這裏 γ_ν 皆爲常數．這樣，(24)的第一個積分亦可寫爲形式

$$\frac{e^{-2i\theta}}{2i}\int_b \tilde{K}(z, \bar{t})\, \varphi_\theta(z, \zeta)\, dz + \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\gamma_\nu}{2i}\int_{b_\nu} \tilde{K}(z, \bar{t})\, dz.$$

第一個積分可由留數定理計算之；它等於 $\pi e^{-2i\theta}\tilde{K}(\zeta, \bar{t})$．因爲 $\tilde{K}(z, \bar{t})$ 在 B 內有一單值積分，積分 $\int_{b_\nu} \tilde{K}(z, \bar{t})\, dz$ 皆等於零．

改換變數，我們從(24)引出表達式

$$\varphi'_\theta(z,\zeta)=-\frac{1}{(z-\zeta)^2}+\pi e^{2i\theta}\tilde{K}(z,\bar{\zeta})-\frac{1}{2i}\int_b\frac{\tilde{K}(z,\bar{t})\,d\bar{t}}{\zeta-t}. \quad (25)$$

若將 $\tilde{K}(z,\bar{\zeta})=\overline{\tilde{K}(\zeta,\bar{z})}$ 用柯西積分

$$\tilde{K}(z,\bar{\zeta})=\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_b\frac{\tilde{K}(t,\bar{z})}{t-\zeta}dt}$$

表出，則可將這個公式寫爲較簡潔的形式．經過容易的處理，得到

$$\varphi'_\theta(z,\zeta)=-\frac{1}{(z-\zeta)^2}+e^{i\theta}\int_b\operatorname{Im}\{e^{-i\theta}(t-\zeta)^{-1}\}\tilde{K}(z,\bar{t})d\bar{t}. \quad (25')$$

若一區域的核函數已知，映照函數可以立即由表達式(25)或(25′)算得．

(25)意外地指出了，兩個函數 $\varphi'_\theta(z)$(具有不同的 θ)的差，除開一個常數因子外，等於核函數．事實上

$$\varphi'_{\theta_1}(z)-\varphi'_{\theta_2}(z)=\pi(e^{2i\theta_1}-e^{2i\theta_2})\tilde{K}(z,\bar{\zeta}). \quad (26)$$

我們現在轉向映照函數 $p(z)=p(z;u,v)$．因爲 $p(z)$ 映照 b_ν 於以原點爲中心的圓弧割綫，$\log p(z)$ 在每一 b_ν 上將有一常數的實數部分．所以

$$\overline{\log p(z)}=-\log p(z)+2\log r_\nu,\qquad z\in b_\nu, \quad (27)$$

這裏 r_ν 爲對應於 b_ν 的圓弧的半徑． 現在 $p(z)$僅在 $z=u$ 處有零點，在 $z=v$ 處有極點．函數

$$p_1(z)=\log p(z)-\log(z-u)+\log(z-v)$$

在 B 內正則；更進一步，它在那裏將是單值的，因爲 $\arg p(z)$ 沿着任意的 b_ν 上的全變化等於零(S_3 的圓弧割綫不包圍原點)且 $-\log(z-u)$ 和 $\log(z-v)$ 的周期相互抵消． 這樣，$p_1(z)$可取作爲(22)中的 $f(z)$．應用(27)，經過一些簡化，我們得到

$$\overline{\left[\left(\frac{p'(\zeta)}{p(\zeta)}-\frac{1}{\zeta-u}+\frac{1}{\zeta-v}\right)\right]}=$$

$$=-\frac{1}{2i}\int_b\tilde{K}(z,\bar{\zeta})\left[\log p(z)-\log\left(\frac{z-u}{z-v}\right)\right]dz-$$

$$-\frac{1}{i}\int_b\log\left|\frac{z-u}{z-v}\right|\tilde{K}(z,\bar{\zeta})dz+\sum_{\nu=1}^{p}\frac{\log r_\nu}{i}\int_{b_\nu}\tilde{K}(z,\bar{\zeta})\,dt.$$

第一個積分按柯西定理為零，且以前曾指出過積分$\int_{b_\nu}\tilde{K}(z,\zeta)dz$等於零．所以

$$\frac{p'(z)}{p(z)}=\frac{1}{z-u}-\frac{1}{z-v}+\frac{1}{i}\int_b \log\left|\frac{t-u}{t-v}\right|\tilde{K}(z,\bar{t})\,d\bar{t}. \qquad (28)$$

同樣求得，分別映照B於區域S_2及S_3'的函數$E(z)=E_\nu(z,\zeta)$和$q(z)=q(z;u,v)$具有表達式

$$\frac{E'(z)}{E(z)}=\frac{1}{z-\zeta}+\frac{1}{i}\int_b \log|t-\zeta|\tilde{K}(z,\bar{t})\,d\bar{t} \qquad (29)$$

及

$$\frac{q'(z)}{q(z)}=\frac{1}{z-u}-\frac{1}{z-v}+\int_b \arg\left(\frac{t-u}{t-v}\right)\tilde{K}(z,\bar{t})\,d\bar{t}. \qquad (30)$$

最後，我們為映照B於S_1的函數$A(z)=A_{\mu\nu}(z)$導出一表達式；足標μ及ν表示邊界部分b_ν和b_μ被映照到界定圓環的那兩個圓周．我們將假定b_ν相應於外圓周且b_ν和b_μ二者皆為B的"內"邊界；若它們中的一個為外邊界，則在證明中需要略加改變．

函數$\log A(z)$在B內正則，但非單值；它對於b_ν及b_μ顯然分別有周期$2\pi i$及$-2\pi i$．若α和β為分別由b_μ及b_ν圍成的單連通區域的內點，我們導出，函數

$$S(z)=\log A(z)-\log(z-\alpha)+\log(z-\beta)$$

在B內單值，因為$A(z)$的周期被這兩個對數函數的周期所抵消．若b_ν或b_μ為B的外邊界，則有關的對數函數必須改變符號．

因為$S(z)$在B內正則單值，它可以代替(22)中函數$f(z)$的位置．我們得到

$$\overline{\frac{A'(z)}{A(z)}-\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{z-\beta}}=$$

$$=\frac{1}{2i}\int_b \tilde{K}(t,\bar{z})[\overline{\log A(t)-\log(t-\alpha)+\log(t-\beta)}]\,dt. \qquad (31)$$

共形映照$A(z)$的映像由圓弧圍成；所以，若r_ν為對應於b_ν的圓弧的半徑，則

$$\log\overline{A(t)}=-\log A(t)+2\log r_\nu, \qquad t\in b_\nu,$$

藉此恆等式及若干顯然的處理，(31)轉換為

$$\overline{\frac{A'(z)}{A(z)}-\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{z-\beta}}=-\frac{1}{i}\int_b \log\left|\frac{t-\alpha}{t-\beta}\right|\tilde{K}(t,\bar{z})\,dt+I_1+I_2,$$

這裏

$$I_1=-\frac{1}{2i}\int_b \tilde{K}(t,\bar{z})[\log A(t)-\log(t-\alpha)+\log(t-\beta)]\,dt$$

而

$$I_2=\sum_{\nu=1}^{p}\frac{\log r_\nu}{i}\int_{b_\nu}\tilde{K}(t,\bar{z})\,dt.$$

按柯西定理I_1爲零,且由已提到的理由,作成I_2的諸積分爲零,所以

$$\frac{A'(z)}{A(z)}=\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}+\frac{1}{i}\int_b \log\left|\frac{t-\alpha}{t-\beta}\right|\tilde{K}(z,\bar{t})\,dt, \qquad (32)$$

這就是所欲求的$A(z)=A_{\nu\mu}(z)$通過核函數的表達式.

我們剛才指出,區域B的每一標準映照函數皆可通過核函數K, $\tilde{K}$, k而表出. 有趣的是,我們注意到這些映照可以具有多於一個的這種表達式,因而導出核函數之間的恆等式. 例如,最後的公式(32)給出映B於S_1型標準區域的映照函數. 另一方面, 這個函數也可以由應用類似於在§2中使用過的考慮直接得到. 於是我們獲得

$$\frac{A'(z)}{A(z)}=(-1)^{p-1}2\pi\frac{|(F'_\nu)^{p\downarrow}(p_{kl})_1^{(p-)\times(p-1)}|}{|(p_{kl})^{(p-1)\times(p-1)}|},$$

這裏

$$F'_\nu=i\int_{b_\nu}K(z,\bar{\zeta})\,d\bar{\zeta}$$

皆爲第一類函數的微商,而

$$ip_{kl}=\int_{b_k}\int_{b_l}K(z,\bar{\zeta})\,dz\,d\bar{\zeta}$$

爲其周期.

最後,我們補充幾點注意,這些都是關於應用核函數的方法來決定映照一個區域於另一區域的函數的進一步的可能性的.

映照一個給定的區域B於一個共形等價的區域B'的函數在原點處的函數元素$\Sigma_{\nu=1}^{\infty}A_\nu z^\nu$, $A_1>0$, 可以通過這些區域的核函數來決定. 事實上,設

$$K_B(z,\bar{z})=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}z^m\bar{z}^n, \text{ 及 } K_{B'}(\zeta,\bar{\zeta})=\sum_{m,n=0}^{\infty}b_{mn}\zeta^m\bar{\zeta}^n.$$

應用第III章(18)我們求得

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu z^\nu\right)^m\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \overline{A}_\mu \bar{z}^\mu\right)^n=$$

$$=\left(\sum_{m,n=0}^{\infty'} a_{mn} z^m \bar{z}^n\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu A_\nu z^{\nu-1}\right)^{-1}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \overline{A}_\mu \bar{z}^{\mu-1}\right)^{-1}.$$

從這個恆等式,我們可以通過 a_{mn} 和 b_{kl} 依次地定出 A_ν.

其次,我們將指出,怎樣通過多角形區域的幾何數據可以計算出雪瓦茲-克利斯托夫 (Schwarz-Christoffel) 積分中的常數值. 設 $\pi\mu_k$ $(k=1, 2, \cdots, 2p)$爲一多角形 B 的外角, 及 ρw_k 爲以原點爲中心, ρ 爲半徑的圓 C 上的點, 在共形映照下多角形的相應頂點變換到它, 如果我們置 $\pi\mu_{2p+1}=-\sum_{k=1}^{2p}\mu_k-2$, $w_{2p+1}=-1$, 我們得到映 C 於 B 的映照函數的公式

$$z(w)=\int_0^w \prod_{\nu=1}^{2p+1}\left[1-w(w_\nu \rho)^{-1}\right]^{\mu_\nu} dw.$$

若我們將此表達式展開成一冪級數,逆轉之;而後對 z 求微商,則得

$$w'(z)=1+\left(\sum\frac{\mu_k}{\rho w_k}\right)z+\left[\left(\sum\frac{\mu_k}{\rho w_k}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum\frac{\mu_k}{\rho^2 w_k^2}\right]z^2+\cdots, \qquad \sum=\sum_{k=1}^{2p+1}.$$

另一方面,按第二章 § 1, 這同一函數可寫爲

$$w'(z)=\left[\frac{K(z, 0)}{K(0, 0)}\right]=\pi\rho^2 K(z,0),$$

這裏 $K(z,0)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(0)}$ 爲 B 的核函數.

按第 I 章 § 1(16), 我們有

$$K(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left|(z^{k-1})^{n\downarrow}(J(z^{k-1},\bar{z}^{l-1}))_n^{n\times n}\right|\cdot\left|J(z^k\bar{z}^{l-1})_{n,1}^{n\times n}\right|}{\left|J(z^{k-1},\bar{z}^{l-1})^{(n-1)\times(n-1)}\right|\cdot\left|J(z^{k-1},\bar{z}^{l-1})^{n\times n}\right|}.$$

這裏, $(a_{kl})_{r,s}^{n\times n}$ 爲一 $(n-1)\times(n-1)$ 矩陣. 此矩陣是由帶有元素 $a_{kl}(k, l=1, \cdots, n)$ 的 $n\times n$ 矩陣删去第 r 列及第 s 行而得到的.

應用第 I 章 § 1末尾的公式, 我們可以通過多邊形的幾何數據來表達出現在上述行列式中的積分 J. 比較 $w'(z)$ 的兩個展開式

的係數，我們獲得無限多個關係式，它們形如

$$\sum_{k=1}^{2p+1}\frac{\mu_k}{\rho w_k}=-\pi\rho^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|J(z^{k-1},\bar{z}^{l-1})_{n,2}^{n\times n}|\cdot|J(z^{k-1},\bar{z}^{l-1})_{n,1}^{n\times n}|}{|J(z^{k-1},\bar{z}^{l-1})^{(n-1)\times(n-1)}|\cdot|J(z^{k-1},\bar{z}^{l-1})^{n\times n}|}.$$

在第 V 和第 VI 章的全部考慮中，我們都假定了格林函數和映照到區域 $S_k(k=1, 2, 3, 4)$ 的標準映照函數的存在性． 在第 IX 章中我們將指出怎樣通過核函數來給出這些存在證明． 另一方面，在第 I 章中我們沒有用到上述定理就建立了一區域 B 的核函數的存在性．因而，我們可以斷言，$w=\int_0^z K(z,\bar{t})\,dz$ 映照 B 於一極小區域 A．有趣的是注意到當 B 爲單連通且我們知道 A 爲一(單葉)有界星形區域的情形，則一簡單的論證證明 A 必須爲一圓．事實上，若 $R=R(\theta)$，θ 爲 A 的邊界 a 上的點的極坐標，則

$$\int_0^{2\pi}[R(\theta)]^{k+2}e^{ik\theta}d\theta=0,\qquad k=1,\ 2,\ \cdots.$$

因爲，若對某個 k 此不成立，則可如此選擇 α，使 A 在映照 $w+\alpha w^{k+1}$ 之下的像的面積，較 A 之面積爲小。

若我們置 $t=Re^{i\theta}$，則得

$$\int_a R^2t^{k-1}\,dt=i\int_0^{2\pi}R^{k+2}e^{ik\theta}\,d\theta+\int_0^{2\pi}R^{k+1}e^{ik\theta}\,dR=$$

$$=i\int_0^{2\pi}R^{k+2}e^{ik\theta}\,d\theta-\frac{ik}{k+2}\int_0^{2\pi}R^{k+2}e^{ik\theta}\,d\theta=$$

$$=\frac{2i}{k+2}\int_0^{2\pi}R^{k+2}e^{ik\theta}\,d\theta=0.$$

若 w 爲 A 之一外點，則這些關係式指出 $f(w)=\int_a\left(\frac{R^2}{w-t}\right)dt=$ $=\int^a\left(\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{R^2t^{k-1}}{w^k}\right)dt=0$．但是，依照潘力梅(Plemelj)(或普里瓦洛夫(Privaloff))的一個定理，後一關係式爲 $f(w)(w\in A)$ 當 w 由內部趨近 a 時取極限值 $R^2(\theta)$ 的充要條件． 因爲 $R^2(\theta)$ 在 a 上是實的，$f(w)$ 必須爲一常數 c，因而 $R^2(\theta)=c$，這就證明了定理．

Bergman 2, 9, 15, 18.

Bergman and Schiffer 4, 5.

Courant, Manel, and Shiffman.
Garabedian and Schiffer 1.
Groetsch 1, 2.
Koebe 1.
Nehari 1, 3.
Plemelj.
Privaloff.
de Possil.
Schiffer 1, 5, 6, 9, 10.
Shiffman.

VII. 邊界上的直交化

1. 定義和初等性質

直到現在爲止，在討論一區域 B 內的單值解析函數的封閉系時，我們總是限制於這樣的系 $\{\varphi_\nu(z)\}$，它們由條件

$$\iint_B \varphi_\nu(z)\,\overline{\varphi_\mu(z)}\,d\omega=\delta_{\mu\nu}. \tag{1}$$

而直交化．我們曾發現，這樣的系的核函數與 B 的基本調和函數和基本解析函數有密切的關係．

自然我們要問，由應用異於(1)的直交化條件而獲得的核函數在共形映照理論中是否具有類似的功效． 我們將指出，對於直交化條件

$$\int_b \varphi_\nu(z)\,\overline{\varphi_\mu(z)}\,ds=\delta_{\mu\nu} \tag{2}$$

的情況確是如此（我們假定 B 的邊界 b 是充分光滑的）．

顯然，條件(2)比起條件(1)來較難於掌握． 因爲我們的討論由於我們的函數類中的函數的邊界性質的考慮而複雜化了． 然而，我們將試圖通過使得這些困難減爲最少的途徑來發展理論．

我們假設 B 的邊界 b 由 p 條簡單閉解析曲綫 $b_1,\cdots,b_p$ 組成．對於在 B 內正則單值的函數類，我們能够找到一個在 B 內的解析函數 $\varphi_\nu(z)$ 的封閉系 $\{\varphi_\nu(z)\}$，它們都在 $B+b$ 上正則且滿足直交化條件(2)．這裏最好是在這樣的意義下來定義封閉性，即積分

$$\iint_B \left|f(z)-\sum a_\nu\varphi_\nu(z)\right|^2 d\omega$$

可以任意地小． 由龍格和法里耳定理，$\varphi_\nu(z)$ 可以選擇爲有理函數（參閱 Farrell）．

我們將簡短地證明若干在第 I 章討論過的那種類型的定理．置

$$\hat{K}_n(z,\bar{\zeta})=\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}, \tag{3}$$

且我們將證：$\hat{K}_n(z,\bar{\zeta})$ 在 B 的任一閉子區域上一致收斂於一函數 $\hat{K}_B(z,\bar{\zeta})$，即收斂於一直交系 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 的核函數．

我們首先證明，若 $f(z)$ 在 $B+b$ 上解析且 z_0 爲 B 中的一點，則

$$\int_b |f(z)|^2\,ds \geqslant 2\pi\delta\,|f(z_0)|^2, \tag{4}$$

這裏 δ 爲 z_0 到 b 的最小距離．事實上，我們有

$$f^2(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_b \frac{f^2(z)}{z-z_0}\,dz.$$

因而

$$|f^2(z_0)|\leqslant \frac{1}{2\pi\delta}\int_b |f(z)|^2\,ds.$$

由(4)我們斷言，若 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 爲一組在 $B+b$ 上正則的函數系，且由(2)而直交化，則

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi_\nu(z_0)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi\delta},\qquad n=1,\ 2,\ \cdots \tag{5}$$

因爲事實上

$$2\pi\delta\,|\hat{K}_n(z_0,\bar{z}_0)|^2\leqslant\int_b|\hat{K}_n(z,\bar{z}_0)|^2\,ds,$$

因而

$$2\pi\delta\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi_\nu(z_0)|^2\Big)^2\leqslant\int_b\Big|\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(z_0)}\Big|^2\,ds=$$

$$=\sum_{\nu,\mu=1}^{n}\varphi_\nu(z_0)\,\overline{\varphi_\mu(z_0)}\int_b\overline{\varphi_\nu(z)}\varphi_\mu(z)\,ds=\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi_\nu(z_0)|^2.$$

所以，若 $\hat{K}_n(z_0,\bar{z}_0)\neq 0$（若 $\hat{K}_n(z_0,\bar{z}_0)=0$，(5)是顯然的），我們可以用 $\hat{K}_n(z_0,\bar{z}_0)$ 來除而得到

$$2\pi\delta\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi_\nu(z_0)|^2\leqslant 1,$$

由是推得(5)．

我們斷言級數

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\varphi_\nu(\zeta)|^2 \tag{6}$$

對所有的 $\zeta\in B$ 收斂．由雪瓦茲不等式我們求得

$$\left|\sum_{\nu=m}^{n}\varphi_\nu(z)\,\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\right|^2\leqslant\sum_{\nu=m}^{n}|\varphi_\nu(z)|^2\cdot\sum_{\nu=m}^{n}|\varphi_\nu(\zeta)|^2.$$

因爲級數(6)是收斂的，對於與 B 至少相距 δ 的點 $z\in B$ 以及大於一充分大的 N_0 的 m, n；我們有

$$\left|\sum_{\nu=m}^{n}\varphi_\nu(z)\,\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\right|\leqslant\frac{1}{(2\pi\delta)^{\frac{1}{2}}}\varepsilon.$$

這樣，$\hat{K}_n(z,\bar{\zeta})$對 z 在 B 的任一閉子區域上一致收斂，而在該處定義了解析函數

$$\hat{K}_B(z,\bar{\zeta})=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(z)\,\overline{\varphi_\nu(\zeta)}. \tag{7}$$

對 B 爲單位圓的特殊情形，函數

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},\quad\frac{z}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},\quad\frac{z^2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},\quad\cdots,\quad\frac{z^\nu}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},\ \cdots$$

形成一封閉直交系，我們有

$$\hat{K}(z,\bar{\zeta})=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(z\bar{\zeta})^\nu=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-z\bar{\zeta}}.$$

設 $w(z)$ 映照 $|z|<1$ 於一由解析曲綫圍成的單葉區域 B，設 $z(w)$ 爲其逆映照函數，則顯然，函數

$$\frac{(z'(w))^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},\quad\frac{z(z'(w))^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},\ \cdots,\ \frac{z^\nu(z'(w))^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}},\ \cdots$$

形成一個對 B 的封閉直交系．事實上，我們有

$$\int_b\frac{z^\nu(z'(w))^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\bar{z}^\mu\overline{(z'(w))^{\frac{1}{2}}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|dw|=\int_b\frac{z^\nu\bar{z}^\mu}{2\pi}\,d|z(w)|=\delta_{\nu\mu}.$$

因此我們求得

$$\hat{K}_B(w,\bar{w}^*)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}[z(w)\overline{z(w^*)}]^\nu\,[z'(w)\overline{z'(w^*)}]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\frac{[z'(w)\overline{z'(w^*)}]^{\frac{1}{2}}}{1-z(w)\,\overline{z(w^*)}}.$$

置 $w^*=w_0$，這裏 w_0 滿足 $z(w_0)=0$，我們得到

$$\hat{K}_B(w, \bar{w}_0) = \frac{1}{2\pi} (\overline{z'(w_0)^{\frac{1}{2}}})(z'(w))^{\frac{1}{2}}.$$

由此推出，對單連通區域而言，核函數 $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$ 的平方在一圓的內部確定着映照函數的微商．它的一個有趣的推論是恆等式

$$\left(\frac{\hat{K}_B(z, \bar{\zeta})}{\hat{K}_B(\zeta, \bar{\zeta})}\right)^2 = \frac{K_B(z, \bar{\zeta})}{K_B(\zeta, \bar{\zeta})}$$

連繫着單連通區域 B 的核函數 $K(z, \bar{\zeta})$ 和 $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$.

2. 一個輔助的極值問題

在建立 $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$ 和典型區域函數之間的關係時，主要的一步是證明存在兩個函數 $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$ 和 $\hat{L}(z, \zeta)$，它們具有以下的性質：(a) $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$ 在 $B+b$ 上正則；(b) 在 $z=\zeta$ 處除去一個帶留數 $(2\pi)^{-1}$ 的簡單極點外，$\hat{L}(z, \bar{\zeta})$ 在 $B+b$ 上正則；(c) $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$ 和 $\hat{L}(z, \bar{\zeta})$ 由關係式

$$\overline{\hat{K}(z, \bar{\zeta})}\, ds = \frac{1}{i} \hat{L}(z, \bar{\zeta})\, dz \qquad (z \in b) \tag{8}$$

聯繫着． 一旦這兩個函數的存在性得到證明，其餘的一切都容易推得．對於這些函數之一，我們選擇了記號 $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$，是爲預期到其後它將恆等於前節中討論過的核函數．

我們將用一比較不直接的方式來建立這兩個函數的存在性，即藉助於一輔助的極值問題，它從表面上看來似乎與我們手邊的問題無關．

設 $F_\nu(z)$ 表示第一類函數，即其實部爲調和測度 $\omega_\nu(z)$ 的函數；設 $P(z; \zeta)$ 表示其實部爲格林函數的解析函數；最後，設函數 $r(z)$ 由

$$r(z) = \frac{\partial}{\partial \xi} P(z, \zeta), \qquad \zeta = \xi + i\eta$$

確定．因爲所有這些函數在邊界部分 b_ν 上皆爲常數，微分

$$\frac{1}{i} R(z)\, dz = \frac{1}{i}\left[e^{i\theta} r'(z, \zeta) - \alpha P'(z, \zeta) + \sum_{\nu=1}^{p-1} \lambda_\nu F'_\nu(z) \right] dz \tag{9}$$

(這裏 $\alpha, \lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$ 皆爲實常數而 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$) 顯然在 b 上是

實的；我們補充說明，由於雪瓦茲的反照原則，上述函數的實部在解析曲綫 b_ν 上的常值性導致了這些函數在 b 上的正則性.

微分 $-\left(\frac{1}{i}\right)P'(z,\zeta)$ 在 b 上不僅是實的，而且，應用格林函數在 b 上爲零且在 B 內爲正的事實，容易看到，沿着 b 的正向而取的這微分乃是正的. 這樣，取常數 α 足够大，我們可以保證，對 $\theta, \lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$ 給定值，微分(9)在 b 所有的點上成爲非負的. 反之，若微分(9)在 b 上每一點處非負，則 α 必須爲正的，因爲函數 $R(z)$ 在 $z=\zeta$ 的主要部分有形式

$$\frac{e^{i\theta}}{(z-\zeta)^2}+\frac{\alpha}{z-\zeta},$$

因而(應用留數定理)

$$\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_b R(z)\,dz>0.$$

我們現在提出下面的極值問題：對於給定的 θ，試在所有的非負微分(9)中找出帶有最小的 α 的那一個，這個問題的變數爲 $p-1$ 個實數 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}$，因此至少將存在一解，只要我們能够證明，沒有任何的極小化點敍列能够使得數 λ_ν 中的一個或多個趨向於 $\pm\infty$. 然而，讀者將毫無困難地證實，後一可能性將引導到矛盾的結果.

其次我們證明，屬於極值微分的函數 $R(z)$ 在每一邊界部分 b_ν 上至少有一零點. 假設這不眞，而在某邊界部分，例如 b_1 上，有 $R(z)\neq 0$. 在此情況下顯然存在一正常數 γ，使得

$$\frac{1}{i}R(z)\frac{dz}{ds}\geq\gamma>0, \qquad z\in b_1. \tag{10}$$

然而，這與 $\left(\frac{1}{i}\right)R(z)$ 爲極值微分的假定矛盾. 因爲，考慮微分

$$\frac{1}{i}R^*(z)\,dz=\frac{1}{i}\left[R(z)-\varepsilon F_1'(z)\right]dz, \tag{11}$$

這裏 ε 爲一小的正數. 由於在 b_1 上

$$\frac{1}{i}F_1'(z)\frac{dz}{ds}=\frac{\partial\omega_1}{\partial n} \tag{12}$$

(微分是對外法綫取的)，而在 b_1 上 $\omega_1=1$，在 $b-b_1$ 上 $\omega_1=0$，同

時在 B 內 $0<\omega_1<1$, 表達式(12)在 b_1 上爲正而在其餘的邊界部分上爲負. 所以, 若 ε 選擇得足够小, 微分(11)將(由(10))在 b 的所有點爲正. 但這意味着(9)中的正常數 α 能够更小一些而不致違反微分在 b 上非負的條件. 這與在我們的假設下微分(9)具有可能最小的 α 的假定矛盾.

這樣我們已經證明了, 函數 $R(z)$——由於它對 θ 的依賴性, 我們也將記之爲 $R_\theta(z)$——在每一邊界連續統 b_ν 上至少有一零點. 因爲微分(9)在 b 上非負, 當 $z(z\in b)$ 通過這些零點中的任何一個時, $R(z)$ 的幅角增加 2π 的一整倍數, 所以所有這些零點都至少是二重的.

我們其次證明, 其存在性剛被我們所證明的多重零點——每一 b_ν 上一個——恰好具有重數 2, 且它們爲 $R(z)$ 在 $B+b$ 上的全部零點. 事實上, 假設在 B 內有 m 個零點, 在 b 上有 $\mu+2p$ 個二重零點, 由於

$$\frac{1}{i} R(z)\, dz \geqslant 0, \qquad z\in b, \tag{13}$$

(13)的左邊的幅角沿 b 的全變化爲零. $\arg dz$ 的全變化爲 $-2\pi(p-2)$. 所以, $\arg R(z)$ 沿 b 的全變化爲 $2\pi(p-2)$. 依幅角原理, 這個等於 B 內的零點數 m 的 2π 倍加上 b 上零點數 $\mu+2p$ 的 π 倍, 再減去 B 內的極點數的 2π 倍. $R(z)$ 在 $z=\zeta$ 處有一二重極點. 因而

$$2\pi(p-2)=2\pi p+\pi\mu+2\pi m-4\pi,$$

即

$$2m+\mu=0,$$

這就證明了 $R(z)$ 在 B 內無零點, 且在每一 b_ν 上恰好有一二重極點.

現在考慮函數 $(R(z))^{\frac{1}{2}}$. 從前面已經證明過的結果推出, 這個函數除開在 $z=\zeta$ 處有一簡單極點外, 在 $B+b$ 上沒有奇點. 然而, 在我們由此推斷它爲一單值函數以前, 我們必須證明 $\arg R(z)$ 沿每一 b_ν 的全變化是 4π 的一整倍數. 但此容易由幅角原理得出. 在每一 b_ν 上, (13)中的等式僅當 z 與 $R(z)$ 的唯一的二重零

點重合時始能成立。若我們從 b_ν 中除去包含此零點的一任意小的弧 δ，(13) 的左邊將在 $b_\nu-\delta$ 上爲正，$\Delta\arg dz$ 在 $b_\nu-\delta$ 上是如心所欲地與 -2π 或 2π 接近（視 b_ν 爲內邊界或否而定）。所以，$\arg R(z)$ 在 $b_\nu-\delta$ 上有一與 2π 或 -2π 接近的增量。在二重零點處，$\arg R(z)$ 有躍度 2π。結果，$\arg R(z)$ 沿 b_ν 的全變化爲 4π 或零。亦即，爲 4π 之一整倍數。這樣，從上述得出，函數

$$(R_\theta(z))^{\frac{1}{2}}=\frac{e^{i\theta/2}}{z-\zeta}+\cdots$$

（除去其在 $z=\zeta$ 處之一極點外）在 $B+b$ 上是正則且是單值的。

現在我們引進記號

$$\begin{aligned}\sigma(z)&=(R_0(z))^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{z-\zeta}+\cdots,\\ \tau(z)&=(R_\pi(z))^{\frac{1}{2}}=\frac{i}{z-\zeta}+\cdots\end{aligned}\qquad(14)$$

及

$$\begin{aligned}\sigma(z)+i\tau(z)&=4\pi\hat{K}(z,\bar{\zeta}),\\ \sigma(z)-i\tau(z)&=4\pi\hat{L}(z,\zeta).\end{aligned}\qquad(15)$$

由 (14)，$\hat{K}(z,\zeta)$ 在 $B+b$ 上正則而 $\hat{L}(z,\zeta)$ 在 $z=\zeta$ 處有一帶留數 $(2\pi)^{-1}$ 的簡單極點。在 b 上，由 (15)，(14) 和 (13)，我們有

$$\frac{16\pi^2}{i}\hat{K}(z,\bar{\zeta})\hat{L}(z,\zeta)\,dz=\frac{1}{i}[\sigma^2(z)+\tau^2(z)]\,dz=$$

$$=\frac{1}{i}[R_0(z)+R_\pi(z)]\,dz\geqslant0,\qquad(15')$$

它指出了

$$\arg\overline{\hat{K}(z,\bar{\zeta})}=\arg\left[\frac{1}{i}\hat{L}(z,\zeta)\,dz\right]\qquad(\mathrm{mod}\,2\pi).\qquad(16)$$

另一方面，因爲

$$\left(\frac{\sigma(z)}{\tau(z)}\right)^2=\frac{R_0(z)}{R_\pi(z)}=\frac{\left(\frac{1}{i}\right)R_0(z)\,dz}{\left(\frac{1}{i}\right)R_\pi(z)\,dz}\geqslant0,$$

比率 $\dfrac{\sigma(z)}{\tau(z)}$ 在 b 上是實的。所以

$$\left|\frac{\hat{K}(z,\bar{\zeta})}{\hat{L}(z,\zeta)}\right|=\left|\frac{\dfrac{\sigma(z)}{\tau(z)}+i}{\dfrac{\sigma(z)}{\tau(z)}-i}\right|=1, \qquad z\in b.$$

將此與(16)結合並注意到$|dz|=ds$，我們最後得到

$$\overline{\hat{K}(z,\bar{\zeta})}\,ds=\frac{1}{i}\hat{L}(z,\zeta)\,dz, \qquad z\in b, \tag{17}$$

這就是本節開始時提到的恆等式。

3. 函數 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 的同一性

設 $f(z)$ 爲任一在 B 內正則單值且在 b 上連續的函數。由(17)，我們有

$$\int_b f(z)\overline{\hat{K}(z,\bar{\zeta})}\,ds=\frac{1}{i}\int_b f(z)\hat{L}(z,\zeta)\,dz.$$

因爲 $\hat{L}(z,\zeta)$ 在 $z=\zeta$ 處有一帶留數 $(2\pi)^{-1}$ 的簡單極點，所以，由留數定理推出，$\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 具有再生性質

$$\int_b \overline{\hat{K}(z,\bar{\zeta})}f(z)\,ds=f(\zeta). \tag{18}$$

從(18)我們看到，$\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 具有在 §1 中對函數 $\lim_{n\to\infty}\hat{K}_n(z,\bar{\zeta})$ 所期望的極小性質。事實上，考慮在 b 上連續且滿足

$$\varphi(\zeta)=1$$

的正則函數類。由(18)，我們有

$$1=|\varphi(\zeta)|^2=\left|\int_b\overline{\hat{K}(z,\bar{\zeta})}\,\varphi(z)\,ds\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_b|\hat{K}(z,\bar{\zeta})|^2\,ds\int_b|\varphi(z)|^2ds=\hat{K}(\zeta,\bar{\zeta})\int_b|\varphi(z)|^2\,ds,$$

這樣，$\hat{K}(\zeta,\bar{\zeta})\neq0$，且

$$\int_b|\varphi(z)|^2\,ds\geqslant\int_b|M(z)|^2\,ds, \tag{19}$$

這裏

$$M(z)=\frac{\hat{K}(z,\bar{\zeta})}{\hat{K}(\zeta,\bar{\zeta})}, \qquad M(\zeta)=1. \tag{20}$$

(19)中的等號僅當 $\varphi(z)=M(z)$ 時始成立。

藉助於(18)，我們的函數 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 與 §1 中的核函數（在那裏

以相同的符號記之)的同一性容易證得. 因爲 §1 中的系 $\{\varphi_\nu(z)\}$ 是封閉的, 且 $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$ 在 b 上正則, 我們可以用 $\varphi_\nu(z)$ 的綫性組合在 $B+b$ 上任意精確地逼近 $\hat{K}(z, \bar{\zeta})$. 這樣, 對於一給定的 $\varepsilon>0$, 存在 $n=n(\varepsilon)$, 使得

$$\hat{K}(z, \bar{\zeta})=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\varphi_\nu(z)+\delta_n(z,\zeta)=P_n(z,\zeta)+\delta_n(z,\zeta). \qquad (21)$$

這裏

$$|\delta_n(z, \zeta)|<\varepsilon, \qquad z\in B+b. \qquad (22)$$

設 η 爲 B 的另一點, 且設 n 足够大使能保證我們也有

$$|\delta_n(z, \eta)|<\varepsilon, \qquad z\in B+b. \qquad (22')$$

函數 $P_n(z, \zeta)$ 顯然被在(3)中所定義的有限核 $\hat{K}_n(z, \bar{\zeta})$ 再生成, 亦即, 我們有

$$\int_b \overline{\hat{K}_n(z, \bar{\eta})}\, P_n(z, \zeta)\, ds=P_n(\eta, \zeta). \qquad (23)$$

現在考慮積分

$$I=\int_b \hat{K}(z, \bar{\zeta})\overline{\hat{K}_n(z, \bar{\eta})}\, ds.$$

從(18), 我們有

$$I=\overline{\hat{K}_n(\zeta, \bar{\eta})}=\hat{K}_n(\eta, \bar{\zeta}). \qquad (24)$$

另一方面, 由(21)和(23)推出

$$\begin{aligned} I&=\int_b [P_n(z, \zeta)+\delta_n(z, \zeta)]\, \overline{\hat{K}_n(z, \bar{\eta})}\, ds= \\ &=P_n(\eta, \zeta)+\int_b \delta_n(z, \zeta)\, \overline{\hat{K}_n(z, \bar{\eta})}\, ds= \\ &=\hat{K}(\eta, \bar{\zeta})-\delta_n(\eta, \zeta)+\int_b \delta_n(z, \zeta)\, \overline{\hat{K}_n(z, \bar{\eta})}\, ds. \end{aligned}$$

將此與(24)結合, 我們得到

$$\hat{K}_n(\eta, \bar{\zeta})-\hat{K}(\eta, \bar{\zeta})-\delta_n(\eta, \zeta)=\int_b \delta_n(z, \zeta)\, \overline{\hat{K}_n(z, \bar{\eta})}\, ds,$$

因而

$$\begin{aligned} |\hat{K}_n(\eta,\bar{\zeta})-\hat{K}(\eta,\bar{\zeta})+\delta_n(\eta,\zeta)|^2&\leqslant\int_b |\delta_n(z,\zeta)|^2 ds\int_b |\hat{K}_n(z,\bar{\eta})|^2 ds= \\ &=\hat{K}_n(\eta,\bar{\eta})\int_b |\delta_n(z,\zeta)|^2\, ds, \end{aligned}$$

用 l 記 b 之長度, 由(22), 我們有

$$|\hat{K}_n(\eta,\bar{\zeta})-\hat{K}(\eta,\bar{\zeta})+\delta_n(\eta,\zeta)|^2\leqslant\varepsilon^2 l\,\hat{K}_n(\eta,\bar{\eta}). \quad (25)$$

仍由(18),我們進一步有

$$0\leqslant\int_b|\hat{K}(z,\bar{\eta})-\hat{K}_n(z,\bar{\eta})|^2\,ds=$$
$$=\hat{K}(\eta,\bar{\eta})-2\hat{K}_n(\eta,\bar{\eta})+\hat{K}_n(\eta,\bar{\eta})=$$
$$=\hat{K}(\eta,\bar{\eta})-\hat{K}_n(\eta,\bar{\eta}),$$

亦即

$$\hat{K}_n(\eta,\bar{\eta})\leqslant\hat{K}(\eta,\bar{\eta}).$$

這樣,由(22′), (25)導致了

$$|\hat{K}(\eta,\bar{\zeta})-\hat{K}_n(\eta,\bar{\zeta})|\leqslant|\hat{K}(\eta,\bar{\zeta})-\hat{K}_n(\eta,\bar{\zeta})+\delta_n(\eta,\zeta)|+\varepsilon\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\,(1+(l\hat{K}(\eta,\bar{\eta}))^{\frac{1}{2}}).$$

因爲 ε 任意小,我們已經證明了

$$\lim_{n\to\infty}\hat{K}_n(\eta,\bar{\zeta})=\hat{K}(\eta,\bar{\zeta}).$$

這樣,在 §2 中藉輔助極值問題而定義的函數 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 與在 §1 中藉助於一封閉就範直交系而引進的核函數是同一的.

指出下面的事實是有價值的:恆等式(17),連同函數 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 和 $\hat{L}(z,\zeta)$ 的正則性質,唯一地確定了這些函數. 事實上,假設存在另外一對函數 $\hat{K}_1(z,\bar{\zeta})$ 和 $\hat{L}_1(z,\zeta)$, 它們之中除開 $\hat{L}_1(z,\zeta)$ 在 $z=\zeta$ 處有一帶留數 $(2\pi)^{-1}$ 的簡單極點外, 在 $B+b$ 上是正則的,且它們同樣地被恆等式(17)聯繫着. 於是我們將有

$$\int_b|\hat{K}(z,\bar{\zeta})-\hat{K}_1(z,\bar{\zeta})|^2\,ds=$$
$$=\frac{1}{i}\int_b[\hat{K}(z,\bar{\zeta})-\hat{K}_1(z,\bar{\zeta})]\,[\hat{L}(z,\zeta)-\hat{L}_1(z,\zeta)]\,dz.$$

右邊按柯西定理爲零,因爲 $\hat{L}$ 和 $\hat{L}_1$ 的極點抵消了. 所以

$$\int_b|\hat{K}(z,\bar{\zeta})-\hat{K}_1(z,\bar{\zeta})|^2\,ds=0,$$

因而我們得到了 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 與 $\hat{K}_1(z,\bar{\zeta})$ 的恆等性. 而 $\hat{L}(z,\zeta)$ 和 $\hat{L}_1(z,\zeta)$ 的恆等性成爲(17)的一個直接後果.

函數 $\hat{L}(z,\zeta)$ 具有反對稱性質

$$\hat{L}(z,\zeta)=-\hat{L}(\zeta,z), \quad (26)$$

它指出這函數對兩變元爲解析的． 爲了證明(26)，只要注意，由(17)

$\hat{L}(z,\zeta)\hat{L}(z,\eta)dz=-\overline{\hat{K}(z,\bar{\zeta})\hat{K}(z,\bar{\eta})dz},\quad \zeta,\eta\in B,\quad z\in b,$

因而

$$\frac{1}{i}\int_b \hat{L}(z,\zeta)\hat{L}(z,\eta)dz=\overline{\frac{1}{i}\int_b \hat{K}(z,\bar{\zeta})\hat{K}(z,\bar{\eta})\,dz}.$$

右邊的積分按柯西定理爲零，而左邊的值按留數定理求得爲 $\hat{L}(\eta,\zeta)+\hat{L}(\zeta,\eta)$.

4. 與有界函數論的聯系

設 $F(z)=F(z,\zeta)$ 表示函數

$$F(z,\zeta)=\frac{\hat{K}(z,\bar{\zeta})}{\hat{L}(z,\zeta)}. \tag{27}$$

由(17)推出，當 $z\in b$ 時 $|F(z)|\equiv 1$. 我們將證明 $F(z)$ 在 B 內無極點，因而不等式 $|F(z)|\leqslant 1$ 在 B 內成立．爲此目的，我們考慮函數

$$u(z)=\hat{L}(z,\zeta)+e^{i\theta}\hat{K}(z,\bar{\zeta}),\qquad \theta\ 爲實數. \tag{28}$$

由(17)，對於 $z\in b$ 我們有

$$\overline{u(z)}\,ds=\frac{1}{i}\hat{K}(z,\bar{\zeta})\,dz+\frac{e^{-i\theta}}{i}\hat{L}(z,\zeta)\,dz=$$

$$=\frac{e^{-i\theta}}{i}u(z)\,dz.$$

因此

$$\frac{e^{-i\theta}}{i}u^2(z)\,dz\geqslant 0,\qquad z\in b. \tag{29}$$

在每一 b_ν 上 dz 的幅角的變化爲 2π 或 -2π. 若 $u(z)$ 在 b_ν 上無零點，微分(29)將在 b_ν 上爲正，從而 $\arg u^2(z)$ 在 b_ν 上的全變化將爲 -2π 或 2π. 然而這是不可能的，因爲 $u(z)$ 的不在 b 上的零點或極點將給出 $\arg u^2(z)$ 一個變化，此變化爲 2π 的偶數倍．所以，$u(z)$ 在每一 b_ν 上至少有一零點． 若我們應用幅角原理於整個邊界 b；則我們看到，這些就是 $u(z)$ 在 $B+b$ 上的全部零點． 事實上，$\Delta\arg dz=-2\pi(p-2)$，而這個數值剛好被 $u^2(z)$ 在 $z=\zeta$ 處

的二重極點和在 p 個邊界部分上的 p 個二重零點所抵補. 這樣, 函數 $u(z)$ 在 B 內沒有零點. 由於(27)和(28), 這就等於說函數 $F(z)$ 在 B 內不取任何模數為 1 的值. 這樣, 因為 $F(\zeta)=0$ (由於 $\hat{L}(z,\zeta)$ 的極點), 我們已經證得了在 B 內 $|F(z)|\leqslant 1$. 因為 $u(z)$ 在每一 b_ν 上恰好有一次等於零, $F(z)$ 在每一 b_ν 上取模數為 1 的值一次且僅一次. 因而得出 $F(z)$ 映照 B 於 p 重單位圓, 每一 b_ν 相應於整個圓周.

這後一注意意外地指出, $\hat{L}(z,\zeta)$ 在 B 內沒有零點. $F(z)$ 共有 p 個零點, 其中之一係由 $\hat{L}(z,\zeta)$ 的極點而產生的. 所以, $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 在 B 內必須有 $p-1$ 個零點. 但是由(15)及幅角原理的一個應用指出, $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 和 $\hat{L}(z,\zeta)$ 二者在 B 內的零點數目的和為 $p-1$. 因為 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 在 B 內具有 $p-1$ 個零點, 所以 $\hat{L}(z,\zeta)$ 在 B 內沒有零點.

現在考慮在 B 內一致有界、正則且單值的函數 $f(z)$ 的函數族 $\mathfrak{B}$, 且設 ζ 為 B 之一已給的點. 將在單位圓的情況下引到通常的雪瓦茲引理的問題與以推廣, 我們提出下面的問題: 在所有 $\mathfrak{B}$ 的函數中, 試求出這樣的特定函數, 使 $|f'(\zeta)|$ 取極大值. 我們的結果如下述:

設 $f(z)$ 在 B 內正則單值, 且在 B 內 $|f(z)|\leqslant 1$, 則

$$|f'(\zeta)|\leqslant F'(\zeta,\zeta)=2\pi\hat{K}(\zeta,\bar{\zeta}),\qquad \zeta\in B. \tag{30}$$

(30)中的等號當[1] $f(z)\equiv e^{i\theta}F(z,\zeta)$ 時成立.

為了證明這個定理, 只須考慮在 b 上連續的函數 $f(z)$. 函數 $\hat{L}^2(z,\zeta)$ 在 $z=\zeta$ 處有一帶主要部分 $[2\pi(z-\zeta)]^{-2}$ 的二重極點, $(z-\zeta)^{-1}$ 的係數為零, 因為, 由(17)及柯西定理

$$\int_b \hat{L}(z,\zeta)\,dz=-\overline{\int_b \hat{K}^2(z,\bar{\zeta})\,dz}=0.$$

現在考慮積分

$$I=\frac{2\pi}{i}\int_b f(z)\hat{L}^2(z,\zeta)\,dz.$$

從留數定理, $I=f'(\zeta)$. 這樣, 注意到 $|f(z)|\leqslant 1$, (17), (15′) 和

1) 事實上, 等號僅對 $e^{i\theta}F(z,\zeta)$ 始成立, 見 Heins 1.

(27),我們有

$$|f'(\zeta)|\leqslant 2\pi\int_b |\hat{L}^2(z,\zeta)\,dz| = 2\pi\int_b |\hat{K}(z,\bar{\zeta})\hat{L}(z,\zeta)dz| =$$

$$=\frac{2\pi}{i}\int_b \hat{K}(z,\bar{\zeta})\hat{L}(z,\zeta)dz = \frac{2\pi}{i}\int \frac{\hat{K}(z,\bar{\zeta})}{L(z,\zeta)}\hat{L}^2(z,\zeta)dz=$$

$$=\frac{2\pi}{i}\int_b F(z)\hat{L}^2(z,\zeta)\,dz = F'(\zeta),$$

這就證明了(30).

一個與此緊密地聯系着的問題如下：在所有單值於 B 內且除了在 $z=\zeta$ 處的一個帶主要部分

$$g(z)=\frac{1}{(z-\zeta)^2}+\frac{\alpha}{z-\zeta}+\cdots$$

(α 任意)的二重極點外，在 B 內正則的函數中，試找出使 $\int_b |g(z)|\,dz$ 爲最小的函數．這個問題的解是函數

$$G(z)=4\pi^2\hat{L}^2(z,\zeta).$$

事實上,應用如上相同的恆等式,我們得到

$$\int_b |G(z)|\,ds = 4\pi^2\int_b |\hat{L}(z,\zeta)|^2 ds = \frac{4\pi^2}{i}\int_b \hat{L}(z,\zeta)\hat{K}(z,\bar{\zeta})dz=$$

$$=4\pi^2\hat{K}(\zeta,\bar{\zeta}) = \left|\frac{1}{i}\int_b g(z)F(z)\,dz\right| \leqslant \int_b |g(z)|\,ds.$$

在結束這一章時，我們證明,核函數 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 與第 V 章的核函數 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 由關係式

$$4\pi\hat{K}^2(z,\bar{\zeta}) = \hat{K}(z,\zeta) + \sum_{\nu=1}^{p-1}\lambda_\nu F'_\nu(z) \tag{31}$$

聯繫着,這裏 $F_\nu(z)$ 皆爲第一類函數,而 λ_ν 爲適當的實常數．爲了證明(31)，我們這樣選擇常數 λ_ν，使得 $P(z,\zeta)=4\pi\hat{K}^2(z,\bar{\zeta})-$ $-\Sigma_{\nu=1}^{p-1}\lambda_\nu F'_\nu(z)$ 爲一單值函數 $Q(z)$ 的微商(這種選擇的可能性曾在第 V 章 §1 中證明過)．對 $z\in b$,我們有

$$\overline{\frac{1}{i}F'_\nu(z)\,dz} = \frac{1}{i}F'_\nu(z)\,dz,$$

而且由(17)

$$\overline{\frac{4\pi}{i}\hat{K}^2(z,\bar{\zeta})\,dz}=\frac{4\pi\,\hat{L}^2(z,\zeta)}{i}\,dz.$$

所以

$$\overline{\frac{1}{i}Q'(z,\zeta)dz}=\overline{\frac{1}{i}P(z,\zeta)\,dz}=\frac{1}{i}\Big[4\pi\,\hat{L}^2(z,\zeta)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{p-1}\lambda_\nu F'_\nu(z)\Big]dz=\frac{1}{i}\Big[\frac{1}{\pi(z-\zeta)^2}+\text{正則項}\Big]dz=$$

$$=\frac{1}{i}R(z)\,dz. \tag{32}$$

現在設 $f(z)$ 在 B 內正則單值，且 $\iint_B|f'(z)|^2d\omega<\infty$. 由留數定理和格林公式，我們有

$$f'(\zeta)=\frac{1}{2i}\int_b f(z)R(z)dz=\overline{\frac{1}{2i}\int_b\overline{f(z)Q'(z)dz}}=\overline{\iint_B\overline{f'(z)Q'(z)d\omega}}=$$

$$=\iint_B\overline{Q'(z)}f'(z)\,d\omega.$$

這樣，我們發現函數 $P(z)=Q'(z)$ 具有核函數 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 相對於微商函數類 $\{f'(z)\}$ 所具有的特徵再生成性質. 因爲 $P(z)$ 本身爲一單值函數的微商，所以它與 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 恆等，因此(31)得證.

最後我們注意，存在着二種方法以建立基本恆等式(17). 一種可能性在於直接從事於在 §4 中解決了的有界函數理論中的問題. 變分方法導致這個問題的極值的表徵特性，它最後引導到由(17)聯系着的函數 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 和 $\hat{L}(z,\zeta)$ 的存在性的證明. 另外的方法主要地類似於(而在細節方面更爲複雜)在第 IX 章中建立存在定理時所用的方法，即直接作出函數 $\hat{K}(z,\bar{\zeta})$ 和 $\hat{L}(z,\zeta)$而驗證關係式(17).

Ahlfors.
Bergman and Schiffer 4, 5.
Garabedian 1, 2.
Grunsky 3.
Heins 1.
Nehari 2, 4.
Schiffer 6, 10.
Szegö 1, 2.
Walsh 第 VI, XI 章.

VIII. 變 分 法

1. 哈達瑪變分法

本章目的在於研究核函數及相關的區域函數與其定義區域的相倚狀況．我們的研究是基於普通變分法的方法及概念上的．

我們將敍述二個不同的變分法． 其中第一個形式上很優美，但它的缺陷是只能用在光滑的有界區域上． 第二個方法，初看時似乎有損普遍性，而實際上是很優越的，它可用於那些對於邊界上不要求條件的區域上．因爲變分法的最重要應用之一是在於處理極值問題，在這種情況下，對於極值區域的性質預先是無所知的．所以第二個方法對我們的要求來說將更有用些．

設 B 是一個區域，它是由 p 條光滑閉曲綫 $b_1, \cdots, b_p$ 圍成而且有長度參數 s ，s 從零經歷到 l, l 爲 B 的邊界的全長．更正確地說，我們假定定義 b_ν 的參變函數且具有二階連續微商． 我們在 b 上定義函數 $\rho(s)$ 具有二階連續微商 $\rho''(s)$, $0\leqslant s\leqslant l$, 且對於一個固定 $\varepsilon>0$ 我們沿着 b 在 s 處的內法綫，變動對應於 s 的點 $z(s)\in b$ 以距離 $\varepsilon\rho(s)$，我們記此位移爲

$$\delta n=\varepsilon\rho(s);$$

若 ε 爲充分小，b 變換成一新集 b^* 且有光滑曲綫 $b_1^*, \cdots, b_p^*$ 圍成一個區域 B^*． 若 $\rho(s)$ 爲負的，則位移 δn 可取爲對 b 爲向外法綫的方向．

我們今導出一公式表示 B^* 的調和核函數 $k^*(z, \zeta)$，它是以 B 的核函數 $k(z, \zeta)$ 及法綫位移 δn 表示出來的，而且又添上一個數量級 $o(\varepsilon)$ 的項，此處 $o(\varepsilon)$ 表示 ε 的高於一階以上的項．

我們先設 $\delta n\geqslant 0$，這表示 $B^*\subset B$．若 $\varphi(z)$ 是 $\Lambda_0^2(B)$ 類的調和函數，則由第 V 章，§ 3

$$\varphi(z)=D\{k_0(z, t), \varphi(t)\}, \tag{1}$$

$$\varphi(z)=D^*\{k_0^*(z,t),\ \varphi(t)\}. \tag{2}$$

此處 D^* 表示在 B^* 上的狄里希萊積分且 $z\in B^*$. 我們記對應於 B 的變分 δn 的 $k_0(z,t)$ 的變分爲

$$\delta k_0(z,t)=k_0^*(z,t)-k_0(z,t). \tag{3}$$

由(2)減(1)得

$$0=D^*\{\delta k_0(z,t),\ \varphi(t)\}-\iint_{B-B^*}[k_0(z,t),\ \varphi(t)]\,d\omega, \tag{4}$$

這裏我們用了簡寫

$$[\varphi,\psi]=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{5}$$

我們證明

$$\iint_{B-B^*}[k_0,\varphi]\,d\omega=\int_b[k_0,\varphi]\,\delta n\,ds+o(\varepsilon). \tag{6}$$

欲證(6)式我們引進一組新的坐標(σ,ν), ν 是循着 b 的法綫方向及 σ 是循着法綫的直交軌綫方向度量的. 特別, 曲綫 b 屬於 σ 曲綫族. 在 b 的充分小鄰域中, 法綫間彼此不相交, 而由 (x,y) 坐標到(σ,ν)坐標的變換是唯一確定的. 因爲變換$(x,y)\to(\sigma,\nu)$的雅可比式爲

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\sigma,\nu)}=1+o(1).$$

所以

$$\iint_{B-B^*}[k_0,\varphi]\,dx\,dy=\iint_{B-B^*}[k_0,\varphi]\frac{\partial(x,y)}{\partial(\sigma,\nu)}\,d\sigma\,d\nu=$$

$$=\iint_{B-B^*}[k_0,\varphi]\,d\sigma\,d\nu+o(\varepsilon)=\int_0^l\left\{\int_0^{\delta n}[k_0,\varphi]\,d\nu\right\}d\sigma+o(\varepsilon).$$

由中值定理, 內部積分式的值爲

$$\int_0^{\delta n}[k_0,\varphi]\,d\nu=[k_0,\varphi]\,\delta n+o(\varepsilon),$$

所以我們有

$$\int_0^l\left\{\int_0^{\delta n}[k_0,\varphi]\,d\nu\right\}d\sigma=\int_b[k_0,\varphi]\,\delta n\,ds+o(\varepsilon),$$

這證明了(6).

在(4)中取

$$\varphi(t)=k_0(t,\ \zeta),$$

利用(6),我們得到

$$D^*\{\delta k_0(z,\ t),\ k_0(t,\zeta)\}=\int_b [k_0(z,t), k_0(t,\zeta)]\delta n\ ds+o(\varepsilon).$$

注意到

$$D^*\{\delta k_0(z,\ t),\ \delta k_0(t,\ \zeta)\}=o(\varepsilon),$$

我們也能寫成

$$D^*\{\delta k_0(z,t), k_0^*\ (t,\zeta)\}=\int_b\ [k_0(z,\ t),\ k_0(t,\ \zeta)]\delta n\ ds+o(\varepsilon),$$

於是,由於 $k_0^*(t,\ \zeta)$ 的再生性質

$$\delta k_0(z,\ \zeta)=\int_b\ [k_0(z,\ t),\ k_0(t,\ \zeta)]\ \delta n\ ds+o(\varepsilon). \tag{7}$$

此即所求核函數的變分式,但我們目前已證及只限於 δn 爲非負的. 由於哈達瑪的創見,進一步易證(7)式,當變分 δn 沒有上述條件限止時仍爲有效.

我們引進第三個域 B^+,它是一個光滑有界域,兼含 B 及 B^*,並且它的邊界在 b 的 ε 鄰域中. 由上述方法,我們變 B^+ 爲 B^* 而計算核函數 k^* 的變分. 在二個變分公式中消去[1] k^+,產生了(7)不再受 δn 的約束.

應該注意,由核函數 $k_0(z,\ \zeta)$ 導出的變分式(7)已由條件 $k_0(\zeta_0,\ \zeta)=0$ 就範化,而 ζ_0 爲一已知定點. 當然不同的就範化會產生不同的變分公式. 這對讀者去計算是一個很好的練習,例如,在第 V 章 § 2 中核函數 $k(z,\zeta)$的變分式,它是在 $\int_b k(z,\ \zeta)\ d\zeta=0$ 的條件下就範化的. 而且應當指出應用此種變分公式於極值問題上對此種不同的就範化只具有很少不同的意義.

在其它區域函數上,亦可得相仿於前的變分公式,例如格林及奈依曼函數. 爲了簡明起見,我們對奈依曼函數只計算下面式子的變分.

$$N(z,\ z_0;\ \zeta,\ \zeta_0)=N(z,\ \zeta,\ \zeta_0)-N(z_0;\ \zeta,\ \zeta_0)=$$

---

1) 爲了使措辭嚴格,必須證明誤差項對所有充分接近的區域是均勻的,參閱 Hadamard [2].

$$=N(z,\zeta)-N(z,\zeta_0)-N(z_0,\zeta)+N(z_0,\zeta_0).$$

我們從恆等式

$$2\pi\varphi(z)=D\{N(t;z,\zeta_0),\varphi(t)\},$$
$$2\pi\varphi(z)=D^*\{N^*(t;z,\zeta_0),\varphi(t)\}\qquad(\varphi(z)\in\Lambda_0^2(B))$$

出發，這些式子是從第V章§3公式(21)得來的．用處理核函數的相同步驟，我們從這些公式得到關係式

$$D^*\{\delta N(t;\zeta,\zeta_0),k_0^*(t,z)\}=$$
$$=\int_b[k_0(t,z),N(t;\zeta,\zeta_0)]\,\delta n\,ds+o(\varepsilon).$$

因為函數 $N^*(t;\zeta,\zeta_0)$ 有同於 $N(t;\zeta,\zeta_0)$ 的奇點

$$\delta N(t;\zeta,\zeta_0)=N^*(t;\zeta,\zeta_0)-N(t;\zeta,\zeta_0)$$

在 B^* 內正則．由 $k_0^*(t,z)$ 的再生性質，我們得到

$$\delta N(z;\zeta,\zeta_0)=\int_b[k_0(t,z),N(t;\zeta,\zeta_0)]\,\delta n\,ds+C(\zeta,\zeta_0)+o(\varepsilon),$$

而常數 $C(\zeta,\zeta_0)$ 是由於 $\delta N(t;\zeta,\zeta_0)$ 不在 $\Lambda_0^2(B)$ 中的事實而產生的．以 z 代以 z_0，再寫上式且相減，得到

$$\delta N(z,z_0;\zeta,\zeta_0)=\int_b[\{k_0(t,z)-k_0(t_0,z_0)\}N(t;\zeta,\zeta_0)]\,\delta n\,ds+o(\varepsilon).$$

因為 φ 及 ψ 是調和函數

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial s}+\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n},$$

及在 b 上 $\dfrac{\partial N}{\partial n}=0$，我們得到

$$\delta N(z,z_0;\zeta,\zeta_0)=\int_b\frac{\partial}{\partial s}(k_0(t,z)-k_0(t,z_0))\frac{\partial N(t;\zeta,\zeta_0)}{\partial s}\delta n\,ds+o(\varepsilon).$$

由第V章§3公式(36)，$k_0(t,z)-k_0(t,z_0)=k(t,z)-k(t,z_0)+C$，這裏 C 與 t 是無關的．因此

$$\delta N(z,z_0;\zeta,\zeta_0)=\int_b\frac{\partial}{\partial s}\{k(t,z)-k(t,z_0)\}\frac{\partial N(t;\zeta,\zeta_0)}{\partial s}\delta n\,ds+o(\varepsilon).$$

用第V章§3(18)式及記憶起格林函數在邊界上等於零，最後得到

$$\delta N(z,z_0;\zeta,\zeta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_b\frac{\partial N(t;z,z_0)}{\partial s}\frac{\partial N(t;\zeta,\zeta_0)}{\partial s}\delta n\,ds+o(\varepsilon),\ (8)$$

此即所欲求的 $N(z, z_0; \zeta, \zeta_0)$ 的變分公式.

格林函數的變分式亦可仿此推算. 在此情況中有一個比較簡短而更有益的導法. 如前一樣,我們簡單地假設 $B^* \subset B$. 由格林公式得

$$\delta G(z, \zeta) = G^*(z, \zeta) - G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{b^*}\left[G^*(t, \zeta)\frac{\partial G^*(t, z)}{\partial n_t} - \right.$$

$$\left. - G(t, \zeta)\frac{\partial G^*(t, z)}{\partial n_t}\right] ds_t = -\frac{1}{2\pi}\int_{b^*} G(t, \zeta)\frac{\partial G^*(t, z)}{\partial n_t}\, ds_t.$$

令 t' 表示 b 上這樣的點:在 b 上 t' 點的法綫是經過 $t \in b^*$. 因爲

$$G(t, \zeta) = G(t', \zeta) + \frac{\partial G(t', \zeta)}{\partial n}\delta n + o(\varepsilon) = \frac{\partial G(t', \zeta)}{\partial n}\delta n + o(\varepsilon),$$

我們有

$$\delta G(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{b^*}\frac{\partial G(t', \zeta)}{\partial n_{t'}}\,\frac{\partial G^*(t, z)}{\partial n_t}\,\delta n\, ds_t + o(\varepsilon).$$

上式中以 G 及 b 來代換 G^* 及 b^*, 我們將顯然的看出被積函數只有二階量級的變化,因此

$$\delta G(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_b \frac{\partial G(z, t)}{\partial n_t}\,\frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_t}\,\delta n\, ds_t + o(\varepsilon). \qquad (9)$$

仿上面相同論證,可證明此式對普遍的 δn 仍有效.

由(9),我們容易導出區域 B 的解析核函數 $K(z, \bar{\zeta})$ 的變分公式. 事實上,由第 V 章 § 4 (38)式,我們得到

$$\delta K(z, \bar{\zeta}) = K^*(z, \bar{\zeta}) - K(z, \bar{\zeta}) = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\partial^2[G^*(z, \zeta) - G(z, \zeta)]}{\partial z \partial \bar{\zeta}} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{\partial^2[\delta G(z, \zeta)]}{\partial z \partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{\pi^2}\int_b \frac{\partial^2 G(z, t)}{\partial z \partial n_t}\,\frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \bar{\zeta} \partial n_t}\,\delta n\, ds_t + o(\varepsilon).$$

我們今用恆等式

$$\frac{\partial G}{\partial n} = 2i\frac{\partial G}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial s} = -2i\frac{\partial G}{\partial \bar{t}}\,\frac{\partial \bar{t}}{\partial s}, \qquad (10)$$

此處 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 及 $\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}}$ 是在第 III 章 § 4(10) 式中引進過的微分算子. (10)式證之如下. 由柯西-黎曼方程,我們得到

$$\frac{\partial G}{\partial n}\, ds = -\frac{\partial H}{\partial s}\, ds = -dH.$$

若取微分 dH 是循着邊界的，那末得到 $dG=0$，我們有

$$dH=2\frac{\partial H}{\partial t}dt=2\frac{\partial H}{\partial \bar{t}}d\bar{t}.$$

再用柯西-黎曼方程，我們也可以寫成

$$dH=-2i\frac{\partial G}{\partial \bar{t}}dt=2i\frac{\partial G}{\partial t}d\bar{t},$$

由此得出(10)式．因此

$$\delta K(z,\bar{\zeta})=\frac{4}{\pi^2}\int_b\frac{\partial^2 G(z,t)}{\partial z\partial \bar{t}}\frac{\partial^2 G(t,\zeta)}{\partial\bar{\zeta}\partial t}\left|\frac{\partial t}{\partial s}\right|^2\delta n\,ds+o(\varepsilon).$$

由第 V 章 § 4 (38)式及 $\left|\frac{\partial t}{\partial s}\right|=1$，我們最後得到

$$\delta K(z,\bar{\zeta})=\int_b K(z,\bar{t})\,K(t,\bar{\zeta})\,\delta n\,ds+o(\varepsilon). \tag{11}$$

我們亦可用(9)式來導出調和度量 $\omega_\nu(z)$，$\nu=1,\cdots,p$ 的變分公式．令 c_ν 爲 B 內與 b_ν 相近的水平曲綫．那末

$$\omega_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{c_\nu}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta.$$

因此

$$\delta\omega_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{c_\nu}\frac{\partial\delta G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{c_\nu}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\int_b\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\frac{\partial G(\zeta,t)}{\partial n_t}\delta n\,ds_t ds_\zeta+o(\varepsilon)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\int_b\left\{\int_{c_\nu}\frac{\partial^2 G(\zeta,t)}{\partial n_\zeta\partial n_t}ds_\zeta\right\}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\delta n\,ds_t+o(\varepsilon),$$

因此

$$\delta\omega_\nu(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_b\frac{\partial\omega_\nu(t)}{\partial n_t}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\delta n\,ds_t+o(\varepsilon). \tag{12}$$

對於曲綫 b_μ 的調和度量 $\omega_2(z)$的周期 $p_{\nu\mu}$，我們同樣有

$$\delta p_{\nu\mu}=\int_b\frac{\partial\omega_\nu(t)}{\partial n_t}\frac{\partial\omega_\mu(t)}{\partial n_t}\delta n\,ds_t+o(\varepsilon). \tag{13}$$

2. 區域函數的單調性質

作爲上節中所導出的變分公式的第一個應用我們將引出若干

共形不變量的一些性質.

從(11)式,我們有

$$\delta K(z,\bar{z})=\int_b |K(z,\bar{t})|^2\,\delta n\,ds_t+o(\varepsilon).$$

從公式立刻可以指出當域B減縮時,$K(z,\bar{z})$却增大,這個性質在第III章中在不同的形態下已導出過. 相仿的而不太明顯的不等式也可以從較多有關公式中導出來,這些變分公式中具有正的積分函數. 例如,考慮變分式

$$\delta[K(z,\bar{z})-K(z,\bar{\zeta})-K(\zeta,\bar{z})+K(\zeta,\bar{\zeta})]=$$
$$=\int_b |K(z,\bar{t})-K(t,\bar{\zeta})|^2\,\delta n\,ds_t+o(\varepsilon),$$

它明顯地得出:當B域增大時,正函數$K(z,\bar{z})-K(z,\bar{\zeta})-$$-K(\zeta,\bar{z})+K(\zeta,\bar{\zeta})$減縮. 對於核函數$k_0(z,\zeta)$的相仿結果也可以由公式(7)得出,這個工作留給讀者作爲練習.

我們要考慮的另一個不等式是關於B域的常數$\gamma(\zeta)=\gamma_B(\zeta)$的(樂平(Robin)常數). 這個常數由格林函數$G(z,\zeta)$的表達式

$$G(z,\zeta)=\log\frac{1}{|z-\zeta|}+\gamma(\zeta)+O(|z-\zeta|)$$

所定義. 由(9),$\gamma(\zeta)$的變分立刻可以得到

$$\delta\gamma(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\int_b\left(\frac{\partial G(t,\zeta)}{\partial n_t}\right)^2\delta n\,ds_t+o(\varepsilon).$$

這個表達式指出$\gamma(\zeta)$是與域俱增的,而這也容易從極大原理推得的.

考慮從(9)得出的變分公式

$$\delta[2G(z,\zeta)-\gamma(z)-\gamma(\zeta)]=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_b\left[\frac{\partial}{\partial n_t}(G(z,t)-G(\zeta,t))\right]^2\delta n\,ds_t+o(\varepsilon),$$

可以得到有趣的不等式. 因為公式中的被積函數是正的,$2G(z,\zeta)-\gamma(z)-\gamma(\zeta)$當域增大時減少. 同樣對函數

$$m(z,\zeta)=2G(z,\zeta)+2\log(z-\zeta)-\gamma(z)-\gamma(\zeta)$$

也是正確的. 由於逐步的變分我們能够將b的內圍道變成點而外圍道變成一個大圓. 後面的變分是由圓及外圍道之間的區域的調

和度量的水平綫來作成的，從一個由水平綫所圍成的區域到另一個充分靠近於它的水平綫圍起來的區域我們只要從第一條曲綫的 s 處沿着法綫方向度以 $\rho(s)$ 的距離就可以了. 對於大圓，我們很快的能够算出 $m(z,\zeta)$來，且看到當圓的半徑趨於 ∞ 時 $m(z,\zeta)\to 0$. 於是對於 B, $m(z,\zeta)\geqslant 0$, 這個不等式對於由光滑有界區域逼近的任意區域 B 都成立.

若 B 由單曲綫 b 所圍成且包有無窮遠點. 於是,我們有不等式

$$2G(z,\zeta)+2\log|z-\zeta|\geqslant\gamma(z)+\gamma(\zeta), \tag{14}$$

容易看出,即使 B 不是有限時也成立.

特別在單連通區域 B 中，公式(14)可表成含有古典的單位圓中單葉映照的偏差定理.

命 B 含有無窮遠點且令

$$g(z)=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots$$

共形地映照 B 到單位圓外,於是 B 的格林函數為

$$G(z,\zeta)=\log\left|\frac{1-\overline{g(\zeta)}\,g(z)}{g(z)-g(\zeta)}\right|.$$

因此

$$\gamma(z)=\log\frac{|g(z)|^2-1}{|g'(z)|}.$$

因而,從(14)

$$2\log\left|(1-\overline{g(\zeta)}g(z))\frac{z-\zeta}{g(z)-g(\zeta)}\right|\geqslant\log\frac{(1-|g(z)|^2)(1-|g(\zeta)|^2)}{|g'(z)|\,|g'(\zeta)|}.$$

當 $\zeta\to\infty$, 我們有

$$\lim_{\zeta\to\infty}\log\frac{|1-\overline{g(\zeta)}\,g(z)|^2}{|1-|g(\zeta)|^2|}\geqslant\log\frac{|g(z)|^2-1}{|g'(z)|},$$

因而

$$2\log|g(z)|\geqslant\log\frac{|g(z)|^2-1}{|g'(z)|},$$

或

$$|g'(z)| \geqslant 1 - \frac{1}{|g(z)|^2}. \tag{15}$$

若

$$z = f(x) = x + c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots$$

爲 $x = g(z)$ 的逆函數, (15)可以寫成

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|x|^2}{|x|^2 - 1}.$$

應用 $f(x)$ 的展開式, 我們易得

$$\left|1 - \frac{c_1}{x^2}\right| - \frac{1}{|x|^2} + o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \leqslant 1,$$

因而

$$|c_1| \leqslant 1.$$

我們再一次的得到第 VI 章, § 3 中的不等式(20a).

最後, 考慮表達式

$$P = \sum_{\nu,\mu=1}^{p} \lambda_\mu \lambda_\nu p_{\mu\nu},$$

此處 $p_{\mu\nu}$ 是調和度量的周期而 λ_ν 是實常數. 由(13), 我們有

$$\delta P = \int_b \sum_{\nu,\mu=1}^{p} \lambda_\mu \lambda_\nu \frac{\partial \omega_\nu(\zeta)}{\partial n_\zeta} \frac{\partial \omega_\mu(\zeta)}{\partial n_\zeta} \delta n \, ds_\zeta + o(\varepsilon) =$$

$$= \int_b \left(\sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu \frac{\partial \omega_\nu(\zeta)}{\partial n_\zeta} \right)^2 \delta n \, ds + o(\varepsilon).$$

於是發現 P 當域增大時爲減少.

3. 雪弗變分法

基本區域函數的變分公式的最重要的應用是含有這種函數或有關量的極値問題的利用. 上節中所導出的公式的缺點是只能對由光滑曲綫所圍成的區域才有效. 因爲, 在一已給的極値問題中並不知道極値區域具此性質, 因而不可能普遍的在此情況下用這些公式.

這個困難可以由發展各種類型的變分公式來克服, 這些公式在任何單葉域中有效而無關於其邊界上的性質.

考慮由共形映照

$$z^*=z+\frac{\varepsilon a}{z-z_0}, \qquad |a|=1, \tag{16}$$

給出的B的邊界b上的特殊變分，這裏ε是充分小的正參數而z_0是B中的一點．易於證實映照(16)在$|z-z_0|>\varepsilon^{\frac{1}{2}}$中爲單葉．若$\varepsilon$選取得足够小，$B$的邊界曲綫將由(16)式變換成簡單的不相交的曲綫．

對於這個特殊變分爲了利用(9)，我們先假設b是光滑的．我們可以在變換(16)下計算邊界曲綫b的法綫變分δn．這個變分形如

$$\delta n=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{iz'(s)}\cdot\frac{\varepsilon a}{z-z_0}\right\}, \tag{17}$$

此處s是在b上度量弧長．(17)是從向量$\dfrac{\varepsilon a}{z-z_0}$與$b$在$z$點的切綫的交角是$\arg\left\{\dfrac{a}{z'(s)(z-z_0)}\right\}$及$|z'(s)|=1$的事實而得到的．利用(9)，我們有

$$\delta G(z,w)=\operatorname{Re}\left\{-\frac{\varepsilon a}{2\pi i}\int_b\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}\cdot\frac{\partial G(\zeta,w)}{\partial n_\zeta}\frac{ds}{d\zeta}\frac{ds}{\zeta-z_0}\right\}, \tag{18}$$

此處在b上變動的點記作ζ．

若$P(\zeta,z)=G(\zeta,z)+iH(\zeta,z)$是以$G(\zeta,z)$爲實部的解析函數，從柯西-黎曼方程及$G$在$b$上爲零的事實，我們有

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{\partial H}{\partial s}=i\frac{\partial(G+iH)}{\partial s}=i\frac{\partial P(\zeta,z)}{\partial s}=iP'\frac{d\zeta}{ds}.$$

因此，(18)式變成

$$\delta G(z,w)=\operatorname{Re}\left\{\frac{\varepsilon a}{2\pi i}\int_b P'(\zeta,z)P'(\zeta,w)\frac{d\zeta}{\zeta-z_0}\right\}. \tag{19}$$

積分可由留數定理算出．我們有

$$\delta G(z,w)=\operatorname{Re}\left\{\varepsilon a\left[-\frac{P'(w,z)}{w-z_0}-\frac{P'(z,w)}{z-z_0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+P'(z_0,z)\,P'(z_0,w)\right]\right\}. \tag{20}$$

這個公式給出了屬於原來區域 B 的點 z 及 w 表出的格林函數的變分. 爲了得出對於變化點 z^* 和 w^* 的 B^* 的格林函數,我們注意到由(16)

$$G^*(z^*,w^*)=G^*(z,w)+\operatorname{Re}\left\{\varepsilon a\left[\frac{P'(w,z)}{w-t_0}+\frac{P'(z,w)}{z-z_0}\right]\right\}+o(\varepsilon).$$

結合(20)得出了最後公式

$$G^*(z^*,w^*)=G(z,w)+\operatorname{Re}\{\varepsilon aP'(z_0,z)P'(z_0,w)\}+o(\varepsilon). \quad (21)$$

雖然這個公式中不出現依賴於 B 的邊界的項, 我們用它時可以不考慮域是否光滑有界. 這是因爲在高階項 $o(\varepsilon)$ 中包含了有關邊界光滑性的估計. 我們進而得出另一個導出公式 (21) 的方法, 而這個方法不同於此且所得到的將有效於更普遍類型的邊界上.

令 B 有連通度 p 又令 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{p-1}$ 表示一組解析割綫, 它將 B 變成單連通域, 記爲 $\tilde{B}$. 我們假設 z, z_0, w 不在割綫 γ_ν 上. 我們以 Γ 記一個繞 z_0 點的充分小的圓. 從留數定理,我們有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b+\gamma}[P^*(t^*,w^*)-P(t,w)]\,dP(t,z)=-P^*(z^*,w^*)+$$
$$+P(z,w)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[P^*(t^*,w^*)-P(t,w)]\,dP(t,z),$$
$$z_0\neq w,\ z_0\neq w^*, \quad (22)$$

這裏在 γ 上的積分表示經過割綫 γ_ν 的二邊, 對 $\tilde{B}$ 取正向, 而 t^*, w^* 爲在 t, w 在映照(16)下的像.

我們寫積分爲斯蒂爾傑斯(Stieltjes)積分. 爲了看出它們的存在,我們只需考慮一個將 $\tilde{B}$ 映到單位圓上的映照. 然後我們定義在 t 平面上的任何開集上的 $\int dP$ 如同在開集的像所在的單位圓上的那一部分上的 $\int dP$. 我們在 t 平面上定義了質量分布. 從達布和 (Darboux sums) 的共形不變性用在斯蒂爾傑斯積分上我們能够證明積分的存在且具有有界積分的常見的性質, 因爲我們可以考慮在具有解析邊界的 B 域的像上積分.

因爲 P^*-P 及 dP 在 b 上都是虛的, 在(22)式左邊的在 b 上

的積分是虛的．此外，我們有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(P^*-P)dP=\sum_{\nu=1}^{p-1}\left[(\omega_\nu^*(w^*)-\omega_\nu(w))\int_{\gamma_\nu}dP(t,z)\right],$$

而這個表達式顯然是虛的，因之

$$\operatorname{Re}\{P^*(z^*,w^*)-P(z,w)\}=$$
$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(P^*(t^*,w^*)-P(t,w))\,dP(t,z)\right\}.$$

因爲 $P(t,w)$ 及 $P^*(t,w^*)$ 在 Γ 內正則

$$\int_{\Gamma}[P(t,w)-P^*(t,w^*)]\,dP(t,z)=0,$$

於是

$$G^*(z^*,w^*)-G(z,w)=$$
$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[P^*(t^*,w^*)-P^*(t,w^*)]\,dP(t,z)\right\}=$$
$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[P^{*\prime}(t,w^*)(t^*-t)+o(|t^*-t|)]P'(t,z)dt\right\}=$$
$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}P'(t,w)P'(t,z)\frac{\varepsilon a}{t-z_0}\,dt\right\}+o(\varepsilon),$$

最後一步是從消去星號而加上校正項 $o(\varepsilon)$ 得來．於是

$$G^*(z^*,w^*)-G(z,w)=\operatorname{Re}\{\varepsilon aP'(z_0,w)P'(z_0,z)\}+o(\varepsilon).$$

於是我們在更一般的區域上證明了(21)．

爲了在有些應用時方便些，我們以其它函數來替代(16)中的函數 $\frac{1}{z-z_0}$，而這些函數在 B 的境界上有相仿的情況．因爲在所有的情況下，b 將變爲另外一系單閉曲綫，若 ε 充分小的話，每一個這樣的函數將給出形如(20)或(21)的格林函數的變分公式．因而計算特殊區域變化的格林函數的變分成爲了可能，而這在輔助條件下的極值問題的處理上是一件很重要的事情．

舉例來說，我們考慮 B 的變分使隔離的二點 α 及 β 固定起來．我們可以假設 B 含有無窮遠點．最簡單的變分形式是

$$z^*=z+\frac{\varepsilon a(z-\alpha)(z-\beta)}{z-z_0};$$

仿前進行，對應於(19)可得公式

$$\delta G(z,w)=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{\varepsilon a}{2\pi i}\int_b P'(\zeta,z)P'(\zeta,w)\frac{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}{\zeta-z_0}d\zeta\right\}+o(\varepsilon). \quad (23)$$

若應用留數定理，(23)成爲

$$\delta G(z,w)=\operatorname{Re}\left\{\varepsilon a\left[P'(z_0,z)P'(z_0,w)(z_0-\alpha)(z_0-\beta)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{P'(w,z)(w-\alpha)(w-\beta)}{w-z_0}-\frac{P'(z,w)(z-\alpha)(z-\beta)}{z-z_0}\right]\right\}, \quad (24)$$

因爲在 $z=\infty$ 處留數顯然爲零.

作爲(24)的一個應用，我們來解下列問題：若 $G(z,w)=$ $=\log\left(\frac{1}{|z-w|}\right)+\gamma(w)+O(|z-w|)$ 是一個區域的格林函數的展開式，求一個單連通區域包含點 $z=\infty$ 而不包含點 $z=\alpha$, $z=\beta$，使得 $\gamma(w)$ 取最大值. 這裏我們略去了這樣域的存在的非常簡單的證明.

應用展開式

$$P'(z,w)=-\frac{1}{z-w}+C(w)+O(|z-w|),$$

$$P'(w,z)=\frac{1}{z-w}+C(z)+O(|z-w|),$$

我們從(24)有

$$\delta\gamma(w)=\operatorname{Re}\left\{\varepsilon a\left[P'^2(z_0,w)(z_0-\alpha)(z_0-\beta)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{w^2-2w z_0+z_0(\alpha+\beta)-\alpha\beta}{(w-z_0)^2}-2C(w)\frac{(w-\alpha)(w-\beta)}{w-z_0}\right]\right\}. \quad (25)$$

此處

$$C(w)=-\frac{1}{2}\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}-\frac{\varphi'(w)\overline{\varphi(w)}}{1-|\varphi(w)|^2}=\frac{1}{w}+O\left(\frac{1}{|w|^2}\right)+\cdots,$$

而 $\varphi(w)$是將 B 映照於單位圓上的函數.

若點 α 和 β 不含在 B 中，則它們也不在 B^* 中. 因此 B^* 是一個比較域. 若 B 是使 $\gamma(w)$ 達到最大值的域，則我們有 $\delta\gamma(w)\leqslant 0$，即由於(25)式

$$\operatorname{Re}\left\{a\left[P'^2(z_0, w)(z_0-\alpha)(z_0-\beta)-2C(w)\frac{(w-\alpha)(w-\beta)}{w-z_0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{w^2-2w\,z_0+z_0(\alpha+\beta)-\alpha\beta}{(w-z_0)^2}\right]\right\}\leqslant 0.$$

因爲 a 的幅角是任意的，上式除了表達式中的方括號爲零時才有可能．而這對 B_0 中的每一點 z_0 都對，這樣我們就證明了屬於極值區域的函數 $P(z, w)$ 滿足微分方程

$$P'^2(z,w)(z-\alpha)(z-\beta)=2C(w)\frac{(w-\alpha)(w-\beta)}{w-z}+$$

$$+\frac{w^2-(2w-\alpha-\beta)z-\alpha\beta}{(w-z)^2},$$

這個方程變成特別簡單，若取 $w=\infty$ 爲格林函數的參考點．因爲 $\lim\limits_{w\to\infty} wC(w)=1$，於是我們有

$$P'^2(z, \infty)=\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}.$$

不失一般性，我們可以取 $\alpha=1$，$\beta=-1$，於是我們有

$$(P')^2=\frac{1}{z^2-1},\ P=\log(z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}}).$$

函數 $x=f(z)$映照 B 到單位圓之外且滿足$f(\infty)=\infty$，是具有形式 $f(z)=e^{P(z,\infty)}$，即

$$x=f(z)=z\pm(z^2-1)^{\frac{1}{2}};\qquad z=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

在$|x|=1$，即 $x=e^{i\theta}$ 上，我們有 $z=\cos\theta$．因之，極值區域的邊界含有連接 $z=1$ 和 $z=-1$ 的綫段．量 $e^{-\gamma(\infty)}$ 是 b 的容量．於是，在所有含有定點 α 與 β 的連續統內，連接 α 和 β 的綫段具有最小的容量．

作爲上一節導出的變分法的另一個應用，我們將要解二連通區域的模的極值問題．模 M 是由圓環的半徑的比 $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ $(\gamma_1>\gamma_2)$ 所定義的，這個圓環是已給的二連通區域B所能映照的．若$w=f(z)$是映B到 $1<|w|<M$ 的函數，那末函數

$$\omega(z)=\frac{\log|f(z)|}{\log M} \tag{26}$$

顯然是對應於圓 $|w|=M$ 的 B 的邊界曲綫的調和度量，因爲函數 $\log f(z)$ 具有周期 $2\pi i$，我們有

$$P=\frac{2\pi}{\log M}, \tag{27}$$

這裏 iP 是調和度量 $\omega(z)$ 的共軛的周期.

要解的問題如下：已給 4 點 z_1, z_2, z_3, z_4；求二個不同的連續統 b_1 和 b_2 而 $z_1, z_2 \in b_1$，$z_3, z_4 \in b_2$，使得 b_1+b_2 的二連通補集的模是極大. 極值連續統的存在可由法族理論容易證得，且這留給讀者作爲一個練習.

從(27)明白看出極值區域的調和度量的共軛的周期 P 是極小. 若 b_1, b_2 是光滑曲綫；從(13)，P 的變分是

$$\delta P=\int_b\left(\frac{\partial\omega(z)}{\partial n}\right)^2\delta n\,ds+o(\varepsilon). \tag{28}$$

現在我們來特定變分 δn 使點 $z_1, \cdots, z_4$ 固定而使得到的變分公式可以用在最廣泛的邊界的類型上. 若在 b 上的點 z 按照公式

$$z^*=z+\frac{\varepsilon a\prod_{\nu=1}^{4}(z-z_\nu)}{z-z_0} \qquad (z_0\in B,\ \ \varepsilon>0) \tag{29}$$

而變化，則第一條件顯然滿足. 如前一樣，映照(29)在 b 上是單葉的當 ε 充分小時. 因爲

$$\delta n=\mathrm{Re}\left\{\frac{\varepsilon a}{iz'(s)}\frac{\prod_{\nu=1}^{4}(z-z_\nu)}{z-z_0}\right\}+o(\varepsilon),$$

我們從(28)有

$$\delta P=\mathrm{Re}\left\{\frac{\varepsilon a}{i}\int_b\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)^2\frac{\prod_{\nu=1}^{4}(z-z_\nu)}{z'(s)(z-z_0)}\,ds\right\}+o(\varepsilon),$$

因而

$$\delta P=\mathrm{Re}\left\{-\frac{\varepsilon a}{i}\int_b F'^2(z)\frac{\prod_{\nu=1}^{4}(z-z_\nu)}{z-z_0}\,dz\right\}+o(\varepsilon),$$

這裏 $F(z)$ 是具有實部爲 $\omega(z)$ 的解析函數. 從留數定理，我們有

$$\delta P=\mathrm{Re}\left\{-2\pi a\varepsilon\left[F'^2(z_0)\prod_{\nu=1}^{4}(z_0-z_\nu)-C^2\right]\right\}+o(\varepsilon), \quad (30)$$

這裏 $F(z)=C_0+Cz^{-1}+\cdots$ 是 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 的近旁的展開式.

公式(30)基於公式(28),而這只是在光滑有界區域時才成立. 然而,用(21)式的導出的第二種步驟,我們也可以在最一般的邊界形狀下嚴格的導出(30)來.

若我們現在在我們問題的極值區域中有 $\delta P\geqslant 0$. 因爲 a 的幅角是任意的,我們從(30)得微分方程

$$F'^2(z)=\frac{C^2}{\prod\limits_{\nu=1}^{4}(z-z_\nu)},$$

此處 z 是 B 上任意點. 積分這個微分方程且取實部,我們有

$$\omega(z)=\mathrm{Re}\left\{c_0+c\int_\infty^z\frac{dz}{\left(\prod\limits_{\nu=1}^{4}(z-z_\nu)\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

極值連續統 b_1 和 b_2 於是由橢圓積分

$$c_0+c\int_\infty^z\frac{dz}{((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4))^{\frac{1}{2}}}$$

的實部所決定,它在 b_1 及 b_2 上取常值 0 和 1. 我們看到, 特別, 極值連續統是解析曲綫. 這是明顯的,從 § 2 末所證明的 P 的單調性可知,極值連續統沒有內點.

變分公式常常能够用來對核函數數值計算. 而且,理論的進一步發展引進了很快收斂的核函數的新級數. 例如,柏格曼與雪弗[4, 5]證明了下列關係式成立:

$$\widetilde{K}(z,\overline{w})=\sum_{\mu=0}^{\infty}a_\mu,\quad a_\mu=\sum_{\rho=0}^{\mu}(-1)^\rho\binom{\mu}{\rho}\Gamma^{(\rho+1)}(z,\overline{w}), \quad (31)$$

這裏

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}(a_\mu)^{\frac{1}{\mu}}<1, \quad (32)$$

此處

$$\Gamma^{(1)}(z,\overline{w})=\pi^{-2}\iint_{\widetilde{B}}(t-z)^{-2}(\bar{t}-\overline{w})^{-2}\,d\omega_t.$$

$\tilde{B}$ 是 B 的餘集，而 $\Gamma^{(\rho)}(z,\bar{w})=\iint_B \Gamma^{(\rho-1)}(z,\bar{t})\,\Gamma^{(1)}(t,\bar{w})\,d\omega_t$；累次的核可以單獨地用積分步驟得到.

表示式(31)和不等式(32)從 $\tilde{K}(z,\bar{w})$ 滿足非齊次綫性積分方程

$$\tilde{K}(z,\bar{w})-\iint_B \tilde{\Delta}(z,\bar{t})\tilde{K}(t,\bar{w})\,d\omega_t=\Gamma^{(1)}(z,\bar{w}),$$
$$\tilde{\Delta}(z,\bar{t})=\tilde{K}(z,\bar{t})-\Gamma^{(1)}(z,\bar{t}) \qquad (33)$$

這個事實得到，這個方程的最小特徵值大於1. 級數(31)表示(33)的解的奈依曼展開. 在第II章(7)及(7′)中引入的極小函數 $M_B^{X_0,\cdots,X_n}(z,t)$ 和量 $\lambda_B^{X_0,\cdots,X_n}(t)$ 的相似於(31)的展開式可以得到，且在討論由度量 $ds^2=K(z,\bar{z})|dz|^2$ 所定義的"基本空間"中(參閱第III章，§2(19))，在偏差定理中等等中可以得到與不變度量相聯繫的一些量的界限. 至於詳細證明，讀者可以參閱前述參考文獻.

Bergman 及 Schiffer 1, 4, 5.
Biernacki.
Garabedian 2.
Garabedian 以及 Schiffer 1.
Hadamard 1, 2.
Levy 15.
Loewner.
Schiffer 2, 3, 5, 7, 8.
Volterra.

IX. 存在性的證明

在以前諸章中，建立了核函數與各種解析的及調和的區域函數之間的許多關係．但這些關係的建立是在這些區域函數的存在性已經由另外的方法證明了的假定下進行的．儘管這個假定是合法的；而且，的確，問題中的存在性證明在現在看來已經是古典的了，我們還是希望在我們目前理論的結構範圍以內來證明這些函數的存在性，從而使得這個理論不依賴於其它的領域．

雖然在不同的核函數的情況下，進行的方式在細節方面說來有某些差別，但所有這些證明在基本觀念方面來說是一致的，因而我們將限制於第 V 章 § 2 中的核函數 $\widetilde{K}(z, \bar{\zeta})$ 的情形． 在第 VI 章中曾指出 B 的核函數 $\widetilde{K}(z, \bar{\zeta})$ 與映照 B 於具有平行割綫段的全平面的映照之間有密切連繫；後者的存在性是已經假定了的． 現在我們將循另外的途徑，藉 $\widetilde{K}(z, \bar{\zeta})$ 之助建立一個函數來證明——用直接的方式——它導致一平行割綫映照．

我們將假定 B 的邊界組成部分皆爲閉解析曲綫．雖則此假定限制了我們證明的一般性，但是只要討論過了解析邊界的情形，普遍結果不難由標準的逼近方法得到．

$\widetilde{K}(z, \bar{\zeta})$ 曾被證明具有再生性質

$$\iint_B \overline{\widetilde{K}(z, \bar{t})}\, f'(z) d\omega = f'(t), \qquad t \in B,$$

它對於任一滿足 $\iint_B |f'(z)|^2 d\omega < \infty$ 的單值正則函數 $f(z)$ 都成立．特別，取 $f(z) = (z-w)^{-1}$，這裏 w 爲 B 的一個外點，我們得到

$$\iint_B \frac{\overline{\widetilde{K}(z, \bar{t})}\, d\omega}{(z-w)^2} = \frac{1}{(t-w)^2}.$$

對 w 的積分導致

$$I(w, t) = \iint_B \frac{\overline{\widetilde{K}(z, \bar{t})}\, d\omega}{z-w} = \frac{1}{t-w} + c_t, \tag{1}$$

自然，這裏的積分常數 $c_\nu=c_\nu(t)$ 依賴於 w 所處在 B 的那個特定的"穴"；足標 ν 表示 w 處於單連通區域 A_ν 之內，此區域由邊界部分 b_ν 圍成且與 B 沒有公共點。

我們現在對屬於 B 內的 w 來考慮積分

$$I(w,t)=\iint_B \frac{\overline{\tilde{K}(z,\bar{t})}\,d\omega}{z-w}, \qquad d\omega=dxdy, \quad z=x+iy. \qquad (2)$$

顯然，這積分是收斂的，若 $\{B_m\}$ 爲滿足條件 $B_{m+1}\supset B_m$ 及 $\lim_{m\to\infty} B_m=B$ 的區域敍列，且我們使用記號

$$I_m(w,t)=\iint_{B_m} \frac{\overline{\tilde{K}(z,\bar{t})}\,d\omega}{z-w},$$

則我們有 $\lim_{m\to\infty} I_m(w,t)=I(w,t)$。假若取這樣的 B_m，使之由解析曲綫 b_m 圍成，而 K_ε 表示一個以 w 爲中心，ε 爲半徑之圓，則由格林公式，我們有

$$I_m(w,t)=\frac{1}{2i}\int_{b_m}\frac{\overline{M(z,t)}\,dz}{z-w}-$$

$$-\frac{1}{2i}\int_{K_\varepsilon}\frac{\overline{M(z,t)}\,dz}{z-w}+\iint_{K_\varepsilon}\frac{\overline{\tilde{K}(z,\bar{t})}\,d\omega}{z-w},$$

這裏 $\tilde{K}(z,\bar{t})=\dfrac{dM(z,t)}{dz}$。因爲積分(2)存在，第三個積分當 $\varepsilon\to 0$ 時趨向於零。容易看到第二個積分當 $\varepsilon\to 0$ 時趨向於 $\pi\overline{M(w,t)}$。所以

$$I_m(w,t)=\frac{1}{2i}\int_{b_m}\frac{\overline{M(z,t)}\,dz}{z-w}-\pi\overline{M(w,t)}.$$

顯然，右邊的積分是 w 的解析函數，姑稱之爲 $\lambda_m(w,t)$。這樣

$$I_m(w,t)=-\pi\overline{M(w,t)}+\lambda_m(w,t).$$

當 $m\to\infty$ 時，左邊趨向於一極限，即 $I(w,t)$。因爲對於右邊亦同樣眞確。所以 $\lim_{m\to\infty}\lambda_m(w,t)=\lambda(w,t)$ 存在，而且作爲解析函數敍列的一致收斂極限，其本身也是 w 的解析函數。這樣我們已證明了

$$I(w, t) = -\pi \overline{M(w, t)} + \lambda(w, t), \qquad (3)$$

這裏 $\frac{dM(z, t)}{dz} = \tilde{K}(z, \bar{t})$ 且 $\lambda(w, t)$ 對 w 解析．

我們的下一步驟是證明當 w 穿過 B 的邊界 b 時，$L(w, t)$ 連續地變化．因爲 b 由不相交的閉解析曲綫組成，存在有正數 ρ、使得在每一點 $w_0 \in b$ 處與 b 相切的半徑爲 ρ 的閉圓，除了單獨的一點 w_0 外，其一全在 B 內，而另一全在 B 外．我們以 Γ 記在 w_0 處半徑爲 ρ 的內圓，而其邊界則記爲 γ．我們將以 Γ' 來記外圓．由(1)顯然知道，在 B 的外部 $I(w, t)$ 對 w 是一致連續的．這樣，爲了證明 $I(w, t)$ 穿過 b 時的連續性，只須證明，若 w_1 和 w_2 爲相對於通過 w_0 的圓 γ 的反演點，那末 $I(w_2, t) - I(w_1, t)$ 當 w_1 和 w_2 逼近 w^0 時趨向於零．我們甚至可以假定 w_1 和 w_2 二者皆位於 γ 在 w_0 處的法綫上．

現在我們寫

$$I(w, t) = \iint_{B-\Gamma} \frac{\overline{\tilde{K}(z, \bar{t})}\, d\omega}{z-w} + \iint_{\Gamma} \frac{\overline{\tilde{K}(z, \bar{t})}\, d\omega}{z-w} =$$

$$= I_1(w, t) + I_2(w, t), \qquad (4)$$

且分别證明 $I_1(w, t)$ 和 $I_2(w, t)$ 的連續性．我們有

$$I_1(w_1, t) - I_1(w_2, t) = \iint_{B-\Gamma} \overline{\tilde{K}(z, \bar{t})} \left[\frac{1}{z-w_1} - \frac{1}{z-w_2}\right] d\omega.$$

所以

$$|I_1(w_1, t) - I_1(w_2, t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{B-\Gamma} |\tilde{K}(z, \bar{t})|^2\, d\omega \iint_{B-\Gamma} \left|\frac{1}{z-w_1} - \frac{1}{z-w_2}\right|^2 d\omega \leqslant$$

$$\leqslant C \iint_{B-\Gamma} \left|\frac{1}{z-w_1} - \frac{1}{z-w_2}\right|^2 d\omega,$$

這裏 C 爲一有限常數(我們可取 $C = \tilde{K}(t, \bar{t})$)，$B-\Gamma$ 在 Γ 與 Γ' 二者之外．因而，若我們把對 Γ 和 Γ' 二者言皆爲外部的無限區域 E 來代替後一積分的積分區域，後一積分的值將會增加．所以

$$|I_1(w_1, t) - I_1(w_2, t)|^2 \leqslant C \iint_{E} \left|\frac{1}{z-w_1} - \frac{1}{z-w_2}\right|^2 d\omega = C \cdot A. \qquad (5)$$

右邊積分的值是可以明確地算出來．為了不帶來不必要的參數，我們將假定 $\rho=1$，且 Γ 與 Γ' 的中心分別為 -1 和 1；顯然，這不致影響我們的討論．變換 $x=z^{-1}$ 將 E 變到無限帶狀區域 $-\frac{1}{2}<$ $<\mathrm{Re}\{x\}<\frac{1}{2}$，且我們得到

$$A=|w_1-w_2|^2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dudv}{|1-w_1x|^2|1-w_2x|^2},\qquad x=u+iv.$$

若 $w_1=-\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，則因 $(1+w_1)(1+w_2)=1$，我們有 $w_2=$ $=\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}$，故

$$A=\varepsilon^2(2-\varepsilon)^2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dudv}{|1+\varepsilon x|^2|1-\varepsilon-\varepsilon x|^2}=$$

$$=\varepsilon^2(2-\varepsilon)^2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dudv}{[(1+\varepsilon u)^2+\varepsilon v^2][(1-\varepsilon-\varepsilon u)^2+\varepsilon^2v^2]}=$$

$$=\pi\varepsilon(2-\varepsilon)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{(1+\varepsilon u)(1-\varepsilon-\varepsilon u)}=$$

$$=\pi\log\left[\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(1-\frac{3\varepsilon}{2}\right)}\right].$$

這個當 $\varepsilon\to0$ 時趨向於零．由(5)推知 $I_1(w,t)$ 當 w 穿過邊界時是連續的．

剩下來要證明當 w 在 w_0 處穿過 Γ 時 $\Gamma_2(w,t)$ 連續地變化．為簡單起見，我們仍可假定 Γ 為單位圓而 w_0 為點 $z=1$. 有關的表達式為

$$P=I_2(w_1,t)-I_2(w_2,t)=\iint_{|z|<1}\overline{\tilde{K}(z,\bar{t})}\left(\frac{1}{z-s}-\frac{1}{z-s^{-1}}\right)d\omega,\quad(6)$$

這裏 $w_1=s$ 而 $w_2=s^{-1}$，且 $0<s<1$.

我們將證明這表達式恆等於零．為此目的，我們用格林公式來變換積分 P. 因為 $\tilde{K}(z,\bar{t})$ 在 γ 上除了點 w_0 外是正則的，所以只要當 $z\to w_0$ 時 $M(z,t)$ 至多按照對數那樣地增長着；那末，這種變換是可允許的．但這個事實從第 II 章和第 III 章的結果推出，因為由 $M(z,t)$ 的定義，我們有

$$M(z,t)=M(t,t)+\int_t^z\tilde{K}(z,\bar{t})\,dz,$$

因而

$$|M(z,t)|\leqslant|M(t,t)|+\int_t^z|\tilde{K}(z,\bar{t})|\ |dz|.$$

由於

$$|\tilde{K}(z,\bar{t})|^2\leqslant\tilde{K}(z,\bar{z})\tilde{K}(t,\bar{t}),$$

我們進一步得到

$$|M(z,t)|\leqslant|M(t,t)|+(\tilde{K}(t,\bar{t}))^{\frac{1}{2}}\int_t^z(\tilde{K}(z,\bar{z}))^{\frac{1}{2}}\,|dz|.$$

$\tilde{K}(z,\bar{z})$ 爲一下降區域函數；對半徑爲 ρ 的圓 Γ，其值求得爲 $\tilde{K}_\Gamma(z,\bar{z})=\rho^2\pi^{-1}(\rho^2-|z|^2)^{-2}$. 因此

$$|M(z,t)|\leqslant|M(t,t)|+(\tilde{K}(t,\bar{t}))^{\frac{1}{2}}\frac{\rho}{\pi^{\frac{1}{2}}}\int_t^z(\rho^2-|z|^2)^{-1}\,|dz|.$$

因爲區域 B 由解析曲綫圍成，積分路綫可以這樣來選擇，使得 z 的幅角沿此路綫的變化爲有限的；這個意見和最後的不等式指出，$|M(z,t)|$ 當 z 逼近邊界時的確只能按對數的方式增長.

我們現在應用格林公式於積分 (6). 若 Σ 爲一以 z 爲中心，ε 爲半徑的小圓，而 σ 爲其邊界，則我們有

$$P=\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\overline{M(z,t)}\left(\frac{1}{z-s}-\frac{1}{z-s^{-1}}\right)dz+$$

$$+\iint_\Sigma\overline{\tilde{K}(z,\bar{t})}\left(\frac{1}{z-s}-\frac{1}{z-s^{-1}}\right)d\omega-$$

$$-\frac{1}{2i}\int_\sigma\overline{M(z,t)}\left(\frac{1}{z-s}-\frac{1}{z-s^{-1}}\right)dz.$$

當 $\varepsilon\to0$ 時，展布於 Σ 的積分趨向於零，而最後的積分趨向於 $\pi\overline{M(s,t)}$. 其次，因爲在單位圓上我們可以用 $\frac{1}{\bar{z}}$ 和 $-\frac{d\bar{z}}{\bar{z}^2}$ 分別代替 z 和 dz，我們得到

$$P=\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\overline{M(z,t)\left(\frac{1}{z^{-1}-s}-\frac{1}{z^{-1}-s^{-1}}\right)\frac{dz}{z^2}}-\pi\overline{M(s,t)},$$

因此，由留數定理

$$P=\pi\overline{M(s,t)}-\pi\overline{M(s,t)}=0.$$

這就完成了 $I(w,t)$ 在 B 的邊界 b 上的所有點處爲連續的證明.

現在我們對分別適用於 B 的外部和 B 的內部的 $I(w, t)$ 的公式(1)和(3)進行比較. 由於 $I(w, t)$ 的連續性, 這兩個公式必須都在 b_ν 上成立, 且在該處給出同一的結果. 所以

$$\frac{1}{t-w}+c_\nu=\lim_{w\to b_\nu}\left[-\pi\overline{M(w, t)}+\lambda(w, t)\right],$$

或者記

$$N(w, t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{w-t}+\lambda(w, t)\right),$$

我們有

$$\lim_{w\to b_\nu} N(w, t)=\lim_{w\to b_\nu}\overline{M(w, t)}+\frac{c_\nu}{\pi}, \qquad \nu=1, \cdots, p. \tag{7}$$

我們現在作出函數

$$\varphi(w)=N(w, t)+M(w, t), \qquad \psi(w)=N(w, t)-M(w, t).$$

由(7)推出對在每一邊界部分 b_ν 上的值 w

$$\operatorname{Im}\{\varphi(w)\}=\text{const}, \qquad \operatorname{Re}\{\psi(w)\}=\text{const}. \tag{8}$$

事實上,

$$\lim_{w\to b_\nu}\operatorname{Im}\{\varphi(w)\}=\lim_{w\to b_\nu}\{N(w,t)+M(w,t)-\overline{N(w,t)}-\overline{M(w,t)}\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\{c_\nu-\bar{c}_\nu\}=\text{const},$$

而且對於 $\operatorname{Re}\{\psi(w)\}$ 也類似. 所以由雪瓦茲反照原則, $\varphi(w)$和 $\psi(w)$ 二者皆在 b 上正則. 應用 (8) 和 $\varphi(w)$ 及 $\psi(w)$ 二者皆在 $w=1$ 處有一簡單極點的事實, 我們藉幅角原理容易引出, $\varphi(w)$ 映 B 於具有水平割痕的單葉平面, 而 $\psi(w)$ 映 B 於具有垂直割痕的單葉平面. 我們在這裏略去了這後一步, 因爲它會在第 VI 章中論及.

這樣我們已經證明了古典的裂痕映照的存在性. 正如已經指出過的, 類似的方法可以應用到另外的就範化情形. 在第 V 章的調和核函數的情形, 這將獲致格林函數和奈依曼函數的存在性的證明. 如果應用到第 VII 章的核函數 $\widetilde{K}(z, \zeta)$, 這些觀念將導致第 VII 章的基本邊界關係(8).

Garabedian 及 Schiffer 2.

Lehto.

X. 偏微分方程

1. 引言

我們將在本章中指明,只須作適當的修改,直交函數的方法亦可應用於廣泛的一大類橢圓型偏微分方程的研究中．由於滿足這些方程的函數族及調和函數族之間的高度形式的類似性，將以前諸章中引出的許多結果推廣到這個更廣泛的函數族已經成爲可能的了．

爲了簡單起見我們將限制於標準形式

$$\Delta\varphi-P\varphi\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-P\varphi=0 \tag{1}$$

的討論．這裏 $P=P(x, y)$ 爲在有限平面區域 B 內的實變數 x 和 y 的正值解析函數．爲了避免因不必要的繁複而蒙蔽了主要的概念,我們假定 B 的邊界是光滑的．

我們將要應用微分方程(1)的理論中的二個古典結果,而不加以證明． 第一個就是方程(1)的一個基本解 $S(Z, \mathrm{Z})$[1]的存在性,所謂基本解就是(1)的這樣的一個解，它在 B 內除去點 $\mathrm{Z}\in B$ 外,是正則的,而

$$S(Z, \mathrm{Z})=A(Z, \mathrm{Z})\log\frac{1}{|z-\zeta|}+B(Z, \mathrm{Z}),$$

這裏 $A(Z, \mathrm{Z})$ 及 $B(Z, \mathrm{Z})$ 皆在點 $z=\zeta$ 處對 x 和 y 解析，且 $A(Z, \mathrm{Z})=1$．

我們將要應用的第二個古典結果是第一類和第二類邊值問題(狄里希萊問題和奈依曼問題)的可解性．

綜合此二結果,我們可以容易地指出，在一區域 B 中(1)的格林函數 $G(Z, \mathrm{Z})$ 和奈依曼函數 $N(Z, \mathrm{Z})$ 二者的存在性．這裏的格林函數和奈依曼函數,是調和情形下的顯然推廣,定義如下：

1) 這裏 Z 和 Z 表示(x, y)平面上的點,不一定是複數．

(a) B 的格林函數 $G(Z, \mathrm{Z})$ 爲(1)的一個基本解，當 Z 趨向於 B 的邊界 b 時，它趨向於零．

(b) B 的奈依曼函數 $N(Z, \mathrm{Z})$ 爲(1)的一個基本解，它在 B 的邊界 b 上的法微商等於零．

應當注意，在調和的場合下，奈依曼函數的法微商被取爲常數，這是因爲，拉普拉斯方程的基本解，其法微商爲零者，將恆等於零．對於方程(1)的解，情形與此不同．依格林公式，我們有

$$\iint_B PN\,d\omega = \iint_B \Delta N\,d\omega = \int_b \frac{\partial N}{\partial n}\,ds - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_K \frac{\partial N}{\partial n}\,ds,$$

這裏 k 是圓周 $|z-\zeta|=\varepsilon$．因此

$$\iint_B PN\,d\omega = -2\pi.$$

在調和的場合，即當 $P\equiv 0$ 時，這將導出矛盾，但當 $P>0$ 時則不然．對於方程(1)，奈依曼函數可以認爲具有等於零的法微商的事實使得關於此方程的許多公式較之拉普拉斯方程的對應表達式有更大的明晰性．

正如調和的情形一樣，第一類和第二類邊值問題的解可藉格林函數與奈依曼函數表出．事實上，適當地應用格林公式，我們容易導出

$$\varphi(Z) = \frac{1}{2\pi}\int_b \varphi(\mathrm{Z})\frac{\partial G(Z, \mathrm{Z})}{\partial n_{\mathrm{Z}}}\,ds_{\mathrm{Z}}, \tag{2}$$

$$\varphi(Z) = -\frac{1}{2\pi}\int_b N(Z, \mathrm{Z})\,\frac{\partial \varphi(\mathrm{Z})}{\partial n_{\mathrm{Z}}}\,ds_{\mathrm{Z}}. \tag{3}$$

公式(2)的一個直接推論是：方程(1)的解 φ 所成的族，其絕對值在 B 內有界者，乃是緊緻的．事實上，設

$$|\varphi(Z)|<C, \qquad Z\in B, \tag{4}$$

且以 $G^*(Z, \mathrm{Z})$ 記具有光滑邊界的有界域 $B^*\subset B$ 的格林函數，於是由(2)

$$|\varphi(Z_1)-\varphi(Z_2)| < \frac{C}{2\pi}\max_{z\in b^*}\left|\frac{\partial G^*(Z_1, \mathrm{Z})}{\partial n} - \frac{\partial G^*(Z_2, \mathrm{Z})}{\partial n}\right|\int_{b^*} ds.$$

因爲右邊的上界不依賴於 $\varphi(Z)$，且當選取 $|Z_1-Z_2|$ 充分小時可以

使得任意地小，因而推知，族(4)是等同連續的，故是緊緻的[1]． 類似的考慮證明了這個族也是完全的，也就是任何(一致的)極限函數屬於本族．

現在我們考慮下面的極小值問題：在滿足條件 $\varphi(Z)=1$ $(Z\in B)$ 的(1)的所有解 $\varphi(Z)$ 之中，找出函數 $M(Z)$，使得積分[2]

$$D\{\varphi\}=\iint_B\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+P\varphi^2\right]dxdy \tag{5}$$

之值成爲最小． 爲了說明這個問題是有意義的，我們首先必須證明，滿足條件

$$D\{\varphi\}\leqslant A<\infty \tag{6}$$

的方程(1)的解 φ 之全體組成一緊緻族．

我們注意，若 φ 爲(1)之一解，則 φ^2 爲次調和函數．事實上

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi^2)&=2\varphi\Delta\varphi+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=\\&=2\left[P\varphi^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\geqslant 0.\end{aligned} \tag{7}$$

由格林公式，我們有

$$\begin{aligned}&\int_{C_R}\varphi^2\frac{\partial}{\partial n}\log\left(\frac{R}{|z-z_0|}\right)ds+\int_{C_\varepsilon}\varphi^2\frac{\partial}{\partial n}\log\left(\frac{R}{|z-z_0|}\right)ds-\\&-\int_{C_\varepsilon}\log\left(\frac{R}{|z-z_0|}\right)\frac{\partial(\varphi^2)}{\partial n}ds=-\iint_{B_{R,\varepsilon}}\log\left(\frac{R}{|z-z_0|}\right)\Delta(\varphi^2)d\omega,\end{aligned} \tag{8}$$

這裏 C_R 及 C_ε 爲圓周 $|z-z_0|=R$ 及 $|z-z_0|=\varepsilon$，二者皆在 B 內，而 $B_{R,\varepsilon}$ 爲環 $\varepsilon<|z-z_0|<R$．由於(7)，(8)式之右邊爲負．所以，令 $\varepsilon\to 0$，我們得到

$$2\pi R\varphi^2(Z_0)\leqslant\int_0^{2\pi}\varphi^2Rd\theta.$$

對 R 從 0 到 r 求積分，我們得到

$$\varphi^2(Z_0)\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r}\varphi^2d\omega,$$

---

1) 參看 [4, vol. I, p. 49]．

2) 對於另外類型的橢圓型微分方程，我們應用積分 $D\{\varphi\}$，其歐拉-拉格朗日方程恰好爲我們所欲解的微分方程．在許多物理問題中，$D\{\varphi\}$ 表示該系統的能量．

這裏 B_r 是圓 $|z-z_0|\leqslant r$.

置

$$P_0=\min_{Z\in B_r} P(Z)>0,$$

我們有

$$\varphi^2(Z_0)<\frac{1}{\pi r^2 P_0}\iint_{B_r} P\varphi^2 d\omega<$$

$$<\frac{1}{\pi r^2 P_0}\iint_{B_r}\left[P\varphi^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]d\omega\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi r^2 P_0}\iint_{B}\left[P\varphi^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]d\omega,$$

即

$$\varphi^2(Z_0)\leqslant\frac{1}{\pi r^2 P_0}D\{\varphi\}. \tag{9}$$

這樣我們看到，滿足條件(6)的方程(1)的解所成的族乃是局部一致有界的．所以，如前所證，它在 B 的任何閉子域上是等同連續的，結果，此族是緊緻的，而極值函數 $M(Z)$ 存在．

現在設 $\psi(Z)$ 是(1)的一個解，滿足條件 $\psi(Z)=0$，且以 ϵ 記一實參數，則函數

$$M^*=M+\epsilon\psi$$

顯然是我們的極値問題的一個比較函數．我們若置

$$D\{p,q\}=\iint_B\left[Ppq+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y}\right]d\omega, \tag{10}$$

則我們有

$$D\{M^*,M^*\}=D\{M,M\}+2\epsilon D\{M,\psi\}+\epsilon^2 D\{\psi,\psi\}\geqslant D\{M,M\}.$$

因爲 ϵ 的符號是任意的，我們斷言

$$D\{M,\psi\}=0.$$

特別置

$$\psi=M(Z)-\frac{\varphi(Z)}{\varphi(\mathrm{Z})},$$

這裏 $\varphi(Z)$ 是(1)的使 $\varphi(\mathrm{Z})\neq 0$ 的任意解，我們容易得到

$$D\{k(Z,\mathrm{Z}),\varphi(Z)\}=\varphi(\mathrm{Z}), \tag{11}$$

這裏

$$k(Z, \mathrm{Z})=\frac{M(Z)}{D\{M\}}.$$

這樣我們證明了，函數 $k(Z, \mathrm{Z})$ 的存在，它相對於狄里希萊積分(10)而言，具有核函數的再生性質．顯然，在(1)中函數 $\varphi(Z)$ 可以是 (1) 的具有有限狄里希萊積分 $D\{\varphi\}$ 的任一解． 我們將以 $\Lambda^2(B)$ 記這些函數所成的族．

我們的下一步驟在於證明核函數 $k(Z, \mathrm{Z})$ 有一雙綫性展式

$$k(Z, \mathrm{Z})=\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(Z)\varphi_\nu(\mathrm{Z}), \tag{12}$$

這裏 $\{\varphi_\nu(Z)\}$ 爲由方程(1)的解所成的封閉系，此系由條件

$$D\{\varphi_\nu, \varphi_\mu\}=\delta_{\nu\mu} \tag{13}$$

來就範直交化． 爲了證明(12)，我們首先必須證明上面所說的封閉系的存在性．由於具有解析係數的橢圓型微分方程的解嘗爲解析的事實，這個存在性證明可以密切地模擬於第 I 章中所發展的方法．我們按下述的方式定義一族函數．取所有的數對 (m, n)，$m, n=0, 1, 2, \cdots$；使得每一(m, n)相應於一個且僅一個 $\mu(\mu==1, 2, \cdots)$．我們以 $\varphi(Z)$ 記(1)之解，此解在條件

$$\frac{\partial^{m+n}\varphi(Z)}{\partial x^m \partial y^n}=0, \qquad (m, n)\sim\mu; \quad \mu=0, 1, 2, \cdots, \nu-1,$$

$$\frac{\partial^{m+n}\varphi(Z)}{\partial x^m \partial y^n}=1, \qquad (m, n)\sim\nu.$$

之下給出 $D\{\varphi\}$ 的最小值． 微分(1)，我們看到，僅僅對於指數 m, n 的某些組合，這些極小值問題的解才存在． 可以證明，對於無限多個 m 和 n 的組合，問題的解是存在的． 我們將以 $\varphi_\nu(\nu==1, 2, \cdots)$來記這些解． 在普遍的條件下，通過在第 I 章中的途徑，容易相信，當 $\nu\neq\mu$ 時 $D\{\varphi_\nu, \varphi_\mu\}=0$. 所以乘以適當的因子，我們獲得一就範直交系． 這個系也是封閉的． 事實上，如上所述，(1)的所有解都是實變數 x 和 y 在 B 內的解析函數，所以在 B 的每一點的近鄰，它可以被展爲二重冪級數

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^\nu y^\mu.$$

在 $Z=\mathrm{Z}$ 的鄰域內應用這個展式，由第 I 章的同樣論證，我們看到，函數系 $\{\varphi_\nu(Z)\}$ 是封閉的．

現在設 $\{\varphi_\nu(Z)\}$ 爲任一就範直交系而考慮形式的富里埃展式

$$k(Z,\mathrm{Z})\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(Z),\quad a_\nu=D\{k(Z,\mathrm{Z}),\ \varphi_\nu(Z)\}=\varphi_\nu(\mathrm{Z}).$$

由貝塞爾不等式，我們有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu^2(\mathrm{Z})\leqslant D\{k\}.$$

由雪瓦茲不等式

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(Z)\varphi_\nu(\mathrm{Z})\right|^2\leqslant(\Sigma\varphi_\nu^2(Z))(\Sigma\varphi_\nu^2(\mathrm{Z}))=k(Z,Z)k(\mathrm{Z},\mathrm{Z}).$$

因此，我們有通常的表達式 $k(Z,\mathrm{Z})=\Sigma_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(Z)\varphi_\nu(\mathrm{Z})$，它在 B 內的任一閉域上絕對一致收斂．

現在我們將證明：連繫區域 B 的核函數，奈依曼函數和格林函數的基本關係式

$$k(Z,\mathrm{Z})=\frac{1}{2\pi}[N(Z,\mathrm{Z})-G(Z,\mathrm{Z})],\tag{14}$$

它在第 V 章中被證明爲在調和的情形下是正確的，關係式在微分方程(1)的情形下仍舊保持正確．

若 $\varphi(Z)$ 爲(1)在 B 內之一個解，具有連續的邊界值，則由(2)，我們有

$$\varphi(\mathrm{Z})=\frac{1}{2\pi}\int_b\varphi(Z)\frac{\partial G(Z,\mathrm{Z})}{\partial n_Z}ds_Z.$$

由於當 $Z\in b$ 時 $\dfrac{\partial N(Z,\mathrm{Z})}{\partial n_Z}=0$，此式也可以寫成

$$\varphi(\mathrm{Z})=\frac{1}{2\pi}\int\varphi(Z)\frac{\partial}{\partial n_Z}[G(Z,\mathrm{Z})-N(Z,\mathrm{Z})]\,ds.$$

因爲 $G(Z,\mathrm{Z})-N(Z,\mathrm{Z})$ 顯然在 B 內正則，我們可以應用格林定理，從而獲得

$$\varphi(\mathrm{Z})=\frac{1}{2\pi}D\{N(Z,\mathrm{Z})-G(Z,\mathrm{Z}),\ \varphi(Z)\}.$$

這就是再生性質(11)，藉助於此，恆等式(14)容易由慣常的方法建

立.

注意, 在考慮複變數的直交函數時我們曾指出, 在區域 B 爲單連通區域的情形, 龍格定理使我們能够由冪函數 $1, z, z^2, \cdots$ 的就範直交化來有效地確定一封閉函數系. 應用這個以及任一調和函數 h 皆可表爲形式

$$h(z)=\frac{g(z)+\overline{g(z)}}{2}=\mathrm{Re}\{g(z)\}$$

的事實, 我們容易斷定, 每一在 B 內正則的調和函數可以在那裏用形如

$$\sum_{\nu=1}^{k}[\alpha_{2\nu}\mathrm{Re}(z^\nu)+\alpha_{2\nu+1}\mathrm{Im}(z^\nu)]$$

的表達式來一致地逼近有些類似的考慮也可以在方程 (1) 的場合下加以重複, 當 P 爲一整函數(當它延拓到變元的複數值)時, 一個類似的逼近定理(如同許多其它的結果那樣)由下述定理推出, 這個定理我們寫在這裏而不加以證明:

設 $P(Z)=4F(z,z^*)$ 爲一整函數, 這裏 $z=x+iy, z^*=x-iy$; 則在任一單連通區域內我們可以寫

$$u(Z)=u(z, z^*)=\frac{\mathbf{p}(g(z))+\overline{\mathbf{p}}(\bar{g}(z^*))}{2},$$

這裏 $\mathbf{p}$ 是所謂第一類積分算子, 而 $g(z)=u(z, 0)+$常數 乃是第一類輔助(associate of the first kind).

若 $u(Z)$ 正則於(實) xy-平面上的一單連通區域 B 內, 則 $g(z)$ 在該處正則, 反之亦然. 第一類積分算子雖則是唯一確定的, 但其表示式則有多種. 例如

$$\mathbf{p}(g)=g(z)+\int_0^z\int_0^{z^*}gF\,dz_1\,dz_1^*+$$

$$+\int_0^z\int_0^{z^*}F\left(\int_0^{z_1}\int_0^{z_1^*}Fg\,dz_2\,dz_2^*\right)dz_1dz_1^*+\cdots=$$

$$=g(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2n+2)Q^{(n)}(z,z^*)}{2^{2n}(n-1)}\int_0^z\int_0^{z_1}\cdots\int_0^{z_{n-1}}g(z_n)dz_n\cdots dz_1=$$

$$=g(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}Q^{(n)}(z, z^*)}{2^{2n}B(n, n+1)}\int_0^z(\zeta-z)^{n-1}g(\zeta)d\zeta.$$

這裏 $Q^{(n)}(z, z^*)$ 是某些只依賴於 P 的整函數．由上述定理,我們可以通過將

$$\mathrm{Re}(\mathbf{p}(z^\nu)), \quad \mathrm{Im}(\mathbf{p}(z^\nu)), \qquad \nu=0, 1, 2, \cdots$$

就範直交化而獲得一組就範直交函數．

2. 格林函數和奈依曼函數的直交展開式

本節的目的在於給出一個簡單方法,將方程(1)的格林函數和奈依曼函數藉一適當的就範直交系來表出．

在 B 內具連續微商,且使

$$D\{g\}<\infty$$

的函數 $g(Z)$ 的全體,以 Ω^2 記之．由維爾斯特拉斯逼近定理,對於 Ω^2 存在着封閉的就範直交系 $\{g_\nu\}$,以 $\Gamma(Z, \mathrm{Z})$ 記 B 的拉普拉斯方程的格林函數,那末

$$l(Z, \mathrm{Z})=N(Z, \mathrm{Z})-\Gamma(Z, \mathrm{Z}) \tag{15}$$

必定在 $Z=\mathrm{Z}$ 處連續．然而,在斷定 $l(Z, \mathrm{Z})$ 屬於 Ω^2 以前,我們必須驗證 $l(Z, \mathrm{Z})$ 的一級偏微商也在 $Z=\mathrm{Z}$ 處連續．

一般設

$$S(Z, \mathrm{Z})=-A(Z, \mathrm{Z}) \log|z-\zeta|+B(Z, \mathrm{Z}), \qquad Z=(\xi, \eta)$$

爲(1)的一個基本解,我們有

$$\Delta(-A \log|z-\zeta|+B)=P(-A \log|z-\zeta|+B),$$

因而

$$(\Delta A-PA)\log|z-\zeta|=$$

$$=\Delta B-PB-2\left[\frac{(x-\xi)A_x}{|z-\zeta|^2}+\frac{(y-\eta)A_y}{|z-\zeta|^2}\right], \qquad \zeta=\xi+i\eta.$$

令 $Z\to\mathrm{Z}$,則容易看到這個公式將引出一矛盾,除非

$$\Delta A-PA=0,$$

且

$$\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{Z=\mathrm{Z}}=\left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{Z=\mathrm{Z}}=0. \tag{16}$$

應用(16)容易相信,(15)中的函數 $l(Z, \mathrm{Z})$ 在 $Z=\mathrm{Z}$ 處的確具有連續偏微商．

這樣 $l(Z, \mathrm{Z})$ 屬於 Ω^2，而我們可計算出 $l(Z, \mathrm{Z})$ 按函數系 $g_\nu(Z)$ 的形式展開式的富里埃係數

$$c_\nu(Z) = D\{l(Z, \mathrm{Z}), g_\nu(\mathrm{Z})\}. \tag{17}$$

因爲由格林公式

$$D\{N(Z, \mathrm{Z}); g_\nu(\mathrm{Z})\} = 2\pi g_\nu(Z), \tag{18}$$

(17)也可以寫成

$$c_\nu(Z) = 2\pi g_\nu(Z) - D\{\Gamma(Z, \mathrm{Z}), g_\nu(\mathrm{Z})\}.$$

對於系 $\{g_\nu\}$ 的每個函數 g_ν，我們置

$$h_\nu(Z) = -\frac{1}{2\pi} D\{\Gamma(Z, \mathrm{Z}), g_\nu(\mathrm{Z})\},$$

應用這個記號，我們得到

$$c_\nu(Z) = 2\pi\{g_\nu(Z) + h_\nu(Z)\}. \tag{19}$$

由巴塞佛爾恆等式，我們得到

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(Z)^2 = D\{l(Z, \mathrm{Z})\}$$

的收斂性．現在我們把函數

$$l(Z, \mathrm{Z}) + l(t, \mathrm{Z}) \in \Omega^2$$

看作是 Z 的函數，由類似的方式，我們得到

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [c_\nu(Z) + c_\nu(t)]^2 = D\{l(Z, \mathrm{Z}) + l(t, \mathrm{Z})\}. \tag{20}$$

因而

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(Z) c_\nu(t) = D\{l(Z, \mathrm{Z}), l(t, \mathrm{Z})\}. \tag{21}$$

容易驗證，(18)不僅對 Ω^2 中的函數成立，而且對於具有有限多個對數奇點的函數亦眞．所以由(21)，我們得到

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(Z) c_\nu(t) = 2\pi N(Z, t) - 4\pi\Gamma(Z, t) + + D\{\Gamma(Z, \mathrm{Z})\Gamma(t, \mathrm{Z})\}. \tag{22}$$

明顯地

$$D\{\Gamma(Z, \mathrm{Z}), \Gamma(t, \mathrm{Z})\} = 2\pi\Gamma(Z, t) + \iint_B P(\mathrm{Z})\Gamma(Z, \mathrm{Z})\Gamma(t, \mathrm{Z})\, d\omega,$$

因而

$$N(Z, t)=\Gamma(Z, t)-\frac{1}{2\pi}\iint_B P(\mathrm{Z})\Gamma(Z, \mathrm{Z})\Gamma(t, \mathrm{Z})\, d\omega+$$

$$+2\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}[g_\nu(Z)+h_\nu(Z)][g_\nu(t)+h_\nu(t)]. \qquad (23)$$

這樣，(23)即爲所欲求的 $N(Z, t)$ 通過 $\Gamma(Z, t)$ 和 $\{g_\nu(Z)\}$ 的表示式.

對於 $G(Z, \mathrm{Z})$ 亦可引出一類似的表達式. 設 $\tilde{\Omega}^2$ 爲 Ω^2 的一子族，其中的函數具有等於零的邊值. 由格林公式我們求得，對每個 $f\in\tilde{\Omega}^2$

$$f(Z)=\frac{1}{2\pi}D\{G(Z, \mathrm{Z}), f(\mathrm{Z})\}.$$

應用 $\tilde{\Omega}^2$ 之一封閉就範直交系 $\{\tilde{g}_\nu\}$，且定義

$$\tilde{h}_\nu(Z)=-\frac{1}{2\pi}D\{\Gamma(Z, \mathrm{Z}), \tilde{g}_\nu(\mathrm{Z})\},$$

我們得到

$$G(Z, t)=\Gamma(Z, t)-\frac{1}{2\pi}\iint_B P(\mathrm{Z})\Gamma(Z, \mathrm{Z})\Gamma(t, \mathrm{Z})d\omega+$$

$$+2\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\{\tilde{g}_\nu(Z)+\tilde{h}_\nu(Z)\}\{\tilde{g}_\nu(t)+\tilde{h}_\nu(t)\}, \qquad (24)$$

因爲 $l(Z, t)=G(Z, t)-\Gamma(Z, t)\in\tilde{\Omega}^2$.

我們可以總結我們的結果如下. (1)的解所成的族 Λ^2 的核函數收斂. 集合 Ω^2 和 $\tilde{\Omega}^2$ 的核函數不收斂，但是如果引入適當的算子，那末我們可以分別對於 $N(Z, t)$ 和 $G(Z, t)$ 造出它的核表示式. 我們有

$$f(Z)=D\{k(Z, \mathrm{Z}), f(Z)\}, \qquad f\in\Lambda^2,$$

$$f(Z)=D\left\{\frac{1}{2\pi}G(Z, \mathrm{Z}), f(\mathrm{Z})\right\}, \qquad f\in\tilde{\Omega}^2,$$

$$f(Z)=D\left\{\frac{1}{2\pi}N(Z, \mathrm{Z}), f(\mathrm{Z})\right\}, \qquad f\in\Omega^2.$$

由格林公式，對於任意的 $f\in\Lambda^2$ 及 $g\in\tilde{\Omega}^2$，我們有

$$D\{f, g\}=0.$$

其次，若 h 爲 Ω^2 的任一元素，那末，我們可以由解(1)的狄里希萊

問題而得到一個與 h 具有相同邊界值的函數 $f\in\Lambda^2$;這樣, $h-f=g$ 屬於 $\tilde{\Omega}^2$, 而我們有分解式

$$h=f+g, \qquad h\in\Omega^2, \qquad g\in\tilde{\Omega}^2, \qquad f\in\Lambda^2.$$

事實上

$$g(Z)=D\{G(Z,\mathrm{Z}),h(\mathrm{Z})\},$$

它給出 h 在族 $\tilde{\Omega}^2$ 內的"投影". 換言之, Λ^2 和 $\tilde{\Omega}^2$ 爲 Ω^2 的這樣的直交子集, 它們的直接和是全空間 Ω^2, 也就是

$$\Omega^2=\Lambda^2\oplus\tilde{\Omega}^2. \tag{25}$$

假想地, 取每一族的核函數的運算應用到表達式(25), 我們得到

$$\frac{1}{2\pi}N(Z,\mathrm{Z})=k(Z,\mathrm{Z})+\frac{1}{2\pi}G(Z,\mathrm{Z}).$$

這就對我們指明了關係式(14)存在的基本理由.

在格林函數的表示式(24)與其按(26)的特徵函數的熟知展式之間, 存在着緊密的聯繫.

設 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 爲(26)的特徵值, 而 $u_1,u_2,\cdots$ 爲其對應的特徵函數, 即 λ_ν 爲這樣的正數, 它使方程

$$\Delta u-Pu+\lambda_\nu u=0$$

有一不恆等於零的解 u_ν, 且 u_ν 在 B 的邊界上的邊值爲零, $\nu=$ $=1,2,\cdots$. 於是顯然

$$D\{u_\nu,u_\mu\}=-\iint_B u_\nu(\Delta u_\mu-Pu_\mu)\,d\omega=$$

$$=\lambda_\mu\iint_B u_\nu u_\mu\,d\omega=\lambda_\nu\iint_B u_\nu u_\mu\,d\omega,$$

所以, 在(簡化)假定 $\lambda_\nu\neq\lambda_\mu$, $\nu\neq\mu$ 之下, 我們可以就範化 u_ν, 使其滿足

$$D\{u_\nu,u_\mu\}=\lambda_\nu\delta_{\nu\mu}.$$

由積分方程的古典理論知道, 函數

$$v_\nu=\frac{u_\nu}{(\lambda_\nu)^{\frac{1}{2}}}$$

構成一個對 $\tilde{\Omega}^2$ 的完全就範直交系, 所以我們可以通過它來引出關於 $G(Z,\mathrm{Z})$ 的展式. 這樣, 展式(24)有關聯於古典展式

$$G(Z, Z) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu(Z) u_\nu(Z)}{\lambda_\nu}$$

就成爲顯然的了．

注意． 當涉及到複變數的直交函數時，許多不同類型的直交化曾被考慮過． 在微分方程的場合下，我們也可以考慮一組就範直交函數 $\{\psi_\nu\}$，這裏

$$\int_b \psi_\nu(Z) \psi_\mu(Z) \, ds = \delta_{\nu\mu},$$

而 b 爲區域 B 的邊界曲綫．核函數 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(Z) \psi_\nu(W)$將是有限的，恰如在第III章一樣，這由下述事實推出：對於滿足條件$\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \psi_\nu(W) = 1$ $(W \in B)$ 的綫性組合 $\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \psi_\nu(Z)$，其最小範數具有一正的下界，此下界不依賴於 k，後一句語是方程(1)的解 φ 的積分表達式

$$\varphi(Z) = \int_b \varphi(W) \frac{\partial G(Z, W)}{\partial n_W} \, ds_W$$

的一個簡單推論，G 爲區域 B 對於(1)的格林函數．

3. 具有不定係數的微分方程

在已往的全部研究中，我們應用了微分方程(1)的係數[1] $P(Z)$ 是非負的事實．這個假定是否可以取消而不致影響我們的主要結果，研究這個問題是很重要的．

$$\Delta\varphi(Z) = [P(Z) - k]\varphi(Z), \tag{26}$$

這裏[2] $P(Z)$ 具有與前述相同的性質，而 k 爲一正常數． 顯然，每一型如(1)的微分方程，具有不定係數者，恆可寫爲這個形式，只要這係數在 $B+C$ 上連續．

對應於微分方程(26)的度量由下式給出：

$$D_k\{\varphi, \psi\} = \iint_B [(\text{grad}\,\varphi, \text{grad}\,\psi) + (P-k)\varphi\psi] \, dx \, dy. \tag{27}$$

這裏我們認識到，在推廣我們以前的結果時，第一個困難就在於積

---

1) 這裏我們用Z記點(x, y).

2) 在常數 k 與核函數 $k(Z, W)$之間不應引起混淆.

分 $D_k\{\varphi, \psi\}$ 不是正定的. 爲了克服這個困難,我們引進積分

$$H\{\varphi, \psi\} = \iint_B \varphi\psi \, dx \, dy, \tag{28}$$

它對族 Ω^2 中任意二個函數 φ 和 ψ 都有定義. 於是我們可將積分(27)表爲形式

$$D_k\{\varphi, \psi\} = D\{\varphi, \psi\} - kH\{\varphi, \psi\}, \tag{27'}$$

這裏 $D\{\varphi, \psi\}$ 由(10)式定義, 而函數 $P(Z)$ 就是出現在(26)式中的那一個.

積分 $D\{\varphi, \psi\}$ 和 $H\{\varphi, \psi\}$ 之間的關係, 在聯繫到微分方程(26)的特徵值理論中是熟知的, 而我們可以研究度量(27)藉助於它的形如(27′)的表達式.

如所周知,對於族 Ω^2 中那些滿足條件

$$H\{v, v\} = 1 \tag{29}$$

的函數 $v(Z)$, 成立着不等式

$$D\{v, v\} \geqslant \kappa_1 > 0. \tag{29'}$$

極小值 κ_1 爲函數 $v_1(Z)$ 所達到此函數適合

$$\Delta v_1 = (P - \kappa_1) v_1, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial n} = 0 \qquad (\text{在} C \text{上}). \tag{30}$$

$v_1(Z)$ 爲具有邊界條件

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad (\text{在} C \text{上}) \tag{30'}$$

的微分方程

$$\Delta v = [P(Z) - \kappa] \, v \tag{30''}$$

的第一個特徵函數, 而 κ_1 爲第一個特徵值極值性質(29′)可以作爲第一個特徵函數的另一定義. 若首先 N 個特徵函數 $v_\nu(Z)$ 皆已知, 我們可以用下述要求來確定第 $(N+1)$ 個特徵函數, 即:在族 Ω^2 內所有滿足條件

$$H\{v, v\} = 1, \ H\{v, v_\nu\} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, N) \tag{31'}$$

的函數中, 使得

$$D\{v, v\} = \text{極小} \tag{31}$$

成立. 此極值函數即爲 $v_{N+1}(Z)$, 且(31)的對應的極小值爲 κ_{N+1}.

由定義，有 $0<\kappa_1\leqslant\kappa_2\leqslant\kappa_3\leqslant\cdots$.

現在讓我們假定(26)中的常數 k 與所有的 κ_ν 都不相同．其次，設

$$\kappa_1\leqslant\kappa_2\leqslant\cdots\leqslant\kappa_N<k<\kappa_{N+1}\leqslant\cdots. \tag{32}$$

考慮一組 m 個函數 $f_\nu(Z)\in\Omega^2$，對於它等式

$$D_k\{f_\nu, f_\mu\}=-\delta_{\nu\mu} \qquad (\nu, \mu=1,2,\cdots,m)$$

成立．我們要證明，在這種情況下，必須

$$m\leqslant N. \tag{33'}$$

事實上，假設存在着 $N+1$ 個函數 $f_\nu(Z)\in\Omega^2$，對於它(33)成立，我們可以找到 $f_\nu(Z)$ 的一個綫性組合

$$f(Z)=\sum_{\nu=1}^{N+1}\alpha_\nu f_\nu(Z) \tag{34}$$

使得

$$H\{f, f\}=1, \qquad H\{f, v_\nu\}=0 \qquad (\nu=1,2,\cdots,N). \tag{34'}$$

於是由 $v_{N+1}(Z)$ 的極小性質，我們有

$$D\{f, f\}\geqslant\kappa_{N+1}. \tag{35}$$

所以，由(27′)與(32)，有

$$D_k\{f, f\}=D\{f, f\}-kH\{f, f\}>0. \tag{35'}$$

但由(33)和(34)推出

$$D_k\{f, f\}=-\sum_{\nu=1}^{N+1}\alpha_\nu^2<0, \tag{36}$$

這與(35′)矛盾．因此，如所曾指出的，不等式(33′)必須成立．

其次，讓我們引進函數族 Λ_k^2，它由 Ω^2 中所有滿足微分方程(26)的那些函數 $\varphi(Z)$ 所組成．可能存在着 Λ_k^2 中的函數，它具有負的或等於零的範數 $D_k\{\varphi, \varphi\}$．甚至可能發生，存在着一個函數 $\psi(Z)\in\Lambda_k^2$，它與 Λ_k^2 中的每個元素，包括它自己在內，都是直交的．事實上，若 φ 和 ψ 皆爲在 $B+b$ 上連續且連續可微的函數，我們有

$$D_k\{\varphi, \psi\}=-\int_b\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds=-\int_b\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds \tag{37}$$

所以若 ψ 爲(26)之一個解，它在 b 上等於零或在 b 上具有等於零

的法微商，則對任一在 $B+b$ 上連續可微的函數 φ 我們有

$$D_k\{\varphi, \psi\}=0, \tag{37'}$$

且此恆等式能够容易地推廣到整個族 Λ_k^2. 另一方面，在 b 上具有等於零的法微商的函數 $\psi \in \Lambda_k^2$ 的存在，意味着 k 爲具有邊界條件 (30′) 的微分方程 (30″) 的一個特徵值，而在 b 上等於零的函數 $\psi \in \Lambda_k^2$ 的存在，意味着 k 爲問題

$$\Delta\varphi=[P(Z)-\rho]\,\varphi \tag{38}$$

的一個特徵值．這裏在 b 上 $\varphi=0$. 現在我們要證明下列定理．

若 k 不是微分方程(30″)及(38)的特徵值，則對每個 $\varphi \in \Lambda_k^2$，使得 $D_k\{\varphi, \psi\}=0$ 成立的唯一 $\psi(Z)\in\Lambda_k^2$ 是 $\psi(Z)\equiv 0$.

事實上，因 k 不是任何邊值問題的特徵值，故存在着區域 B 對於微分方程(26)的奈依曼函數和格林函數．我們仍以 $2\pi k(Z, W)$ 記它們的差而稱爲 B 對於(26)的核函數．對於固定的 W, $k(Z, W)$ 顯然是 Λ_k^2 的一個元素；其次對每一個 $\varphi\in\Lambda_k^2$，我們仍有恆等式

$$D_k\{k(Z, W), \varphi(W)\}=\varphi(Z). \tag{39}$$

現在，若存在一個 $\psi(Z)\in\Lambda_k^2$，它直交於每個 $\varphi(Z)\in\Lambda_k^2$，則由此性質及(39)得到

$$\psi(Z)=D_k\{k(Z, W), \psi(W)\}\equiv 0, \tag{40}$$

這就證明了我們的定理．

我們的定理的一個直接推論是，至少存在着一個函數 $\varphi_1(Z)\in\Lambda_k^2$，具有不等於零的範數；我們用要求

$$D_k(\varphi_1, \varphi_1)=\pm 1 \tag{41}$$

將其就範化，此處正負號的選擇則視 $\varphi_1(Z)$ 的範數爲正或負而定．其次，考慮 Λ_k^2 與 $\varphi_1(Z)$ 垂直的子空間．根據我們的定理，這個子空間內至少存在着一個函數 $\varphi_2(Z)$，具有不等於零的範數．此函數我們也認爲是已經就範化了的．我們更進一步選擇一函數 $\varphi_3(Z)$，它與 $\varphi_1(Z)$ 及 $\varphi_2(Z)$ 直交，且具有不等於零的範數，如此繼續進行這一步驟．因爲容易證明在 Λ_k^2 內存在着封閉集合，我們確信，最後將得到這個族的一個封閉直交系，備足要求

$$D_k\{\varphi_\mu, \varphi_\nu\}=\pm\delta_{\nu\mu}; \tag{41'}$$

由不等式(33′)，我們確信，具有負範數的函數 $\varphi_\nu(Z)$ 的個數最多只有N個.

Λ_k^2中的每一函數 $\varphi(Z)$皆可展成一級數

$$\varphi(Z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\varphi_\nu(Z)\qquad(\alpha_\nu=\pm D_k\{\varphi,\varphi_\nu\}),\tag{42}$$

這裏富氏係數的符號與在公式(41′)中的相同. 特別，由(39)和(42)，我們推斷

$$k(Z,W)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\pm\varphi_\nu(Z)\varphi_\nu(W).\tag{43}$$

這樣，即使我們的微分方程的係數是不定的，我們仍然能够藉一封閉直交系構造出奈依曼函數與格林函數之差，此系中具有負範數的函數的個數是有限的，且可以由考慮微分方程的特徵值而得到估計. 由以下的手續可以將新型的度量歸引於舊型的；假設直交系 $\{\varphi_\nu(Z)\}$ 含有 m 個具有負範數的函數 $\varphi_1(Z),\cdots,\varphi_m(Z)$，而系中其餘的函數皆具正範數，則系 $\varphi_{m+1}(Z),\varphi_{m+2}(Z),\cdots$ 爲子空間 Λ_k^2內之一封閉直交基，Λ_k^2與 m 維空間 $\varphi_1(Z),\cdots,\varphi_m(Z)$ 直交；在這個空間內 $D_k\{\varphi,\psi\}$ 爲一有定度量，而所有對這種度量適用的考慮皆可以對它應用，這就指出，在減縮我們對於 $P(Z)$ 所作的假定時所遭遇的困難不是很重大的，而我們的理論容易推廣到 $P(Z)$ 的係數爲不定的情況.

如前，相對於 Λ_k^2 和度量(27)，存在着無限多個不同的直交系 $\{\varphi_\nu(Z)\}$. 由於下述問題的討論，我們獲得這種類型的一個特別有興趣的系統.

考慮所有滿足條件

$$H\{\chi,\chi\}=1\tag{44}$$

的函數 $\chi(Z)\in\Lambda_k^2$ 的全體所成的族，而在這個族中確定了使得

$$D_k\{\chi,\chi\}=\text{極小}\tag{45}$$

的那些函數. 用§1中的方法容易證明，此族中存在着函數$\chi(Z)$，眞正取這個極小值. 設 $\chi_1(Z)$ 爲這些函數中的一個，且令

$$D_k\{\chi_1,\chi_1\}=\sigma_1.\tag{45′}$$

現在考慮一列函數 $\chi_\nu(Z) \in \Lambda_k^2$，它用下面的方法遞推地定義：$\chi_{N+1}(Z)$ 爲族 Λ_k^2 中這樣的函數，它滿足

$$H\{\chi, \chi\}=1, \qquad H\{\chi, \chi_\nu\}=0 \qquad (\nu=1,2,\cdots,N), \quad (46)$$

且使

$$D_k\{\chi, \chi\}=\text{極小}=\sigma_{N+1}. \tag{47}$$

$\chi_\nu(Z)$ 的存在性仍由在 §1 中應用過的那種考慮來證明，而我們用通常的方法求得 $\chi_\nu(Z)$ 之間的下述關係式：

$$H\{\chi_\nu, \chi_\mu\}=\delta_{\nu\mu}, \qquad D_k\{\chi_\nu, \chi_\mu\}=\sigma_\nu\delta_{\nu\mu}. \tag{48}$$

這樣，我們求得一函數系 $\{\chi_\nu(Z)\}$，它同時對於 H-度量與 D_k-度量是直交的。常數 σ_ν 是區域 B 和 $P(Z)-k$ 的泛函。核函數現在顯現爲形式

$$k(Z, W)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma_\nu^{-1}\chi_\nu(Z)\chi_\nu(W). \tag{49}$$

由(49)及(48)的第一個方程我們得出下面的積分方程，它確定所有的 $\chi_\nu(Z)$：

$$\chi_\nu(Z)=\sigma_\nu H\{k(Z,W),\chi_\nu(W)\}=\sigma_\nu\iint_B k(Z,W)\chi_\nu(W)d\omega W. \tag{50}$$

所有這些關係都指出問題(30′)，(30″)的特徵函數 $v_\nu(Z)$；問題(38)的特徵函數 $u_\nu(Z)$ 以及我們的新直交系的函數 $\chi_\nu(Z)$ 之間的巨大的相似性。事實上，我們可以說，當所考慮的函數分別屬於 Ω^2，$\tilde{\Omega}^2$ 以及 Λ_k^2 時，$v_\nu(Z)$，$u_\nu(Z)$ 以及 $\chi_\nu(Z)$ 解決了同一的極值問題。每一系的函數滿足對應的積分方程

$$\begin{aligned} v_\nu(Z)&=\kappa_\nu\iint_B N(Z, W)v_\nu(W)d\omega W, \\ u_\nu(Z)&=\rho_\nu\iint_B G(Z, W)u_\nu(W)d\omega W, \\ \chi_\nu(Z)&=\sigma_\nu\iint_B k(Z, W)\chi_\nu(W)d\omega W. \end{aligned} \tag{51}$$

這裏，積分方程的核永遠是所考慮的族的再生核。這指出族 Ω^2，$\tilde{\Omega}^2$，Λ_k^2 與他們對應的核之間的巨大的對稱性。

4. 彈性方程

前兩節中所描畫出的一般理論在高階方程的情況下，應作何

種修改? 作爲一個例子,我們來考慮方程

$$\Delta\Delta\varphi=0, \tag{52}$$

它在彈性理論中很重要.

如所周知,且不難驗證,(52)的每一解在區域 B 內皆可表爲形式

$$\varphi(Z)=\mathrm{Re}\{\bar{z}f(z)+g(z)\},$$

這裏 $f(z)$ 和 $g(z)$ 皆爲變元 z 的解析函數. 對所有形如

$$F(z,\bar{z})=\bar{z}f(z)+g(z)$$

且其模數的平方在 B 上可積的函數所成的族 E, 我們可求得一封閉系 $\{F_\nu\}$. 我們可以假定,函數系 $\{F_\nu\}$ 已經被就範直交化,使滿足條件

$$\iint_B F_\nu \bar{F}_\mu\, d\omega=\delta_{\nu\mu}.$$

我們將(52)對 B 的核函數定義爲

$$K_4(Z,\mathrm{Z})=\sum_{\nu=1}^{\infty}F_\nu(z,\bar{z})\overline{F_\nu(\zeta,\bar{\zeta})}, \tag{53}$$

且我們求得,它對我們的族中每個 F 具有特徵性質

$$K_4(Z,\mathrm{Z})=\overline{K_4(\mathrm{Z},Z)}, \tag{54}$$

$$F(z,\bar{z})=\iint_B K_4(Z,\mathrm{Z})F(\zeta,\bar{\zeta})\,d\omega_\zeta,\ Z(\zeta,\bar{\zeta}).$$

級數的絕對收斂性係由極小性質的考慮依通常的方法得出的. 我們容易驗證, 當我們的區域以原點爲中心, ρ 爲半徑的圓時,在上述度量的意義下,下面的函數構成族 E 的一個封閉就範直交系:

$$\varphi_0=a_0\rho^{-2}\bar{z};\quad \varphi_{2n-1}=\rho^{-1}(a_n+b_n|z\rho^{-1}|^2)(z\rho^{-1})^{n-1};$$

$$\varphi_{2n}=\rho^{-1}(a_n-b_n|z\rho^{-1}|^2)(z\rho^{-1})^{n-1},\ n=1,2,\cdots.$$

這裏, a_n 和 b_n 都是僅依賴於 n 而不依賴於 ρ 的實常數; 特別, $a_1=\dfrac{3}{(\pi(2+3^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}}$. 這樣,任一 $F\in E$ 可以在一充分小的圓 $|z|\leqslant\delta$ 內表爲形式

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(z,\bar{z}).$$

若$F(0,\ 0)=1$，則我們必須有

$$1=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(0,\ 0)=c_1\varphi_1(0,\ 0)+c_2\varphi_2(0,\ 0)=a_1\rho^{-1}(c_1+c_2).$$

另一方面，若我們取δ足够小，使得上述的圓完全落在區域B內，則我們由巴塞佛爾關係式獲得

$$\iint_B |F|^2\,d\omega \geqslant \iint_{|z|<\delta} |F|^2\,d\omega = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 \geqslant |c_1|^2+|c_2|^2.$$

右邊的極小值當$c_1=c_2=\dfrac{\delta}{2a_1}$時達到，因此

$$\iint_B |F|^2\,d\omega \geqslant \frac{\delta^2}{2a_1^2}=\frac{2+3^{\frac{1}{2}}}{18}\pi\delta^2.$$

這個不等式直接引導到核函數的級數的收斂性(參看6頁)。

(52)的格林函數$G(Z;\mathrm{Z})$為(52)之一個解，它在B內除去一點Z之外，是連續的，而在Z點的鄰近我們有

$$G(Z,\ \mathrm{Z})=|z-\zeta|^2\log\frac{1}{|z-\zeta|}+H(Z;\ \mathrm{Z}), \tag{55}$$

這裏$H(Z;\ \mathrm{Z})$在$Z=\mathrm{Z}$處連續。其次，當Z在B的(光滑)邊界b上時

$$G(Z;\ \mathrm{Z})=0, \tag{56}$$

$$\frac{\partial G(Z;\ \mathrm{Z})}{\partial n_Z}=0, \tag{57}$$

這裏n_Z表示b的內法綫。

我們定義函數

$$M(Z,\ \mathrm{Z})=\frac{\partial^4 G(Z;\mathrm{Z})}{\partial z^2\partial\bar{\zeta}^2}, \tag{58}$$

且我們將由部分積分證明M為K_4乘上一常數因子。

顯然，$M(Z,\ \mathrm{Z})=\overline{M(\mathrm{Z},\ Z)}$.

我們現在計算

$$I(Z)=\iint_B M(Z,\ \mathrm{Z})F(\zeta,\ \bar{\zeta})\,d\omega. \tag{59}$$

以B_ρ記區域B減去小圓$|z-\zeta|<\rho$後剩下的部分，我們得到

$$\iint_B \frac{\partial^4 G}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}^2} F d\omega_\zeta = \frac{1}{2i}\int_b \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}} F d\zeta - \\ -\frac{1}{2i}\int_{|z-\zeta|=\rho} \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}} F d\zeta - \iint_{B_\rho} \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}} f d\omega_\zeta, \tag{60}$$

這裏 $F(\zeta, \zeta) = \bar{\zeta} f(\zeta) + g(\zeta)$(參看(37b), 61 頁).

由(55), 我們有

$$\frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \frac{1}{|2 - \zeta|} + \frac{\partial^3 H}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}}, \tag{61}$$

而由(56)及(57), 對 $Z \in b$ 我們有

$$\frac{\partial^3 G(Z; Z)}{\partial z^2 \partial \bar{z}} = 0.$$

所以命 $\rho \to 0$, 我們得到

$$I(Z) = -\frac{\pi}{2} F(z, \bar{\zeta}) = -\iint_B \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}} f d\omega. \tag{62}$$

我們再次作部分積分而求得

$$\iint_B \frac{\partial^3 G}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}} f\omega_\zeta = \frac{1}{2i}\int_b \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} f d\zeta - \iint_B \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f(\zeta)\, d\omega_\zeta. \tag{63}$$

依柯西-黎曼方程, 右邊第二個積分爲零. 而由(56), 第一個積分爲零, 因此

$$F(z, \bar{\zeta}) = \iint_B \left(-\frac{2}{\pi} \frac{\partial^4 G}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}^2}\right) F d\omega. \tag{64}$$

比較(64)與(54), 得出核函數與 4 階方程(52)的格林函數之間有趣的關係式

$$K_4(Z, Z) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial^4 G(Z; Z)}{\partial z^2 \partial \bar{\zeta}^2}.$$

方程(52)起源於彈性板的理論. 它也可以由通常的方法來處理, 即引進能量積分作爲度量, 亦即

$$\{\varphi, \psi; \sigma\} = \frac{1}{2} D \iint_B [\Delta\varphi\Delta\psi - \\ -(1-\sigma)(\varphi_{xx}\psi_{yy} + \varphi_{yy}\psi_{xx} - 2\varphi_{xy}\psi_{xy})]\, dx\, dy. \tag{65}$$

這裏 D(我們將取它等於 2)及 σ(波阿松 Poisson 常數)皆爲物質常數. 由部分積分法可以給出我們的度量具有另外的形式, 它是常有用的. 我們有

$$\{\varphi, \psi; \sigma\}=\int_b\left[M(\varphi)\frac{\partial\psi}{\partial n}+V(\varphi)\psi\right]ds. \qquad (66)$$

這裏表達式

$$M(\varphi;\sigma)=2(1-\sigma)[\varphi_{xx}\cos^2\alpha+2\varphi_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+\varphi_{yy}\sin^2\alpha)+ \\ +\sigma\Delta\varphi], \qquad (67)$$

$$V(\varphi;\sigma)=2\left[(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}((\varphi_{xx}-\varphi_{yy})\sin\alpha\cos\alpha- \right. \\ -\varphi_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha))-(\varphi_{xxx}+\varphi_{xyy})\cos\alpha- \\ \left. -(\varphi_{yyy}+\varphi_{xxy})\sin\alpha\right] \qquad (68)$$

都是有着簡單物理解釋的量，而 ∂n 和 ds 分別指外法綫和綫元素，α 爲法綫與 x 軸的交角.

如果我們在此度量的意義下將解 φ_ν 直交化，則可以證明，核函數是有限的. 應用這些直交函數我們可以解決兩個不同的邊值問題.

a)（邊界夾住的情况）當 φ 與 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 在 B 的邊界 b 上給定時；

b)（自由邊界的情况）當 M 與 V 在 b 上給定時.

當討論拉普拉斯方程時，我們用下面的方法得到複直交函數與實直交函數間的簡單關係，從封閉直交解析函數 ϕ_ν 出發，我們從

$$\frac{\partial(h_{2\nu}+ih_{2\nu+1})}{\partial z}=\phi_\nu, \ \frac{\partial(h_{2\nu}+ih_{2\nu+1})}{\partial\bar{z}}=0$$

定出實調和函數 h_ν. 於是 $D\{h_\nu, h_\mu\}=\delta_{\nu\mu}$ 的證明是一簡單的事情，這裏度量是狄里希萊積分. 參看第V章§2，下面我們將指出，一類似的步驟應用於方程 $\Delta\Delta\varphi=0$，而仍引導到複直交函數與實直交函數間的關係.

我們由關係式

$$\frac{\partial^2(h_{2\nu}+ih_{2\nu+1})}{\partial z^2}=F_\nu, \ \frac{\partial^2(h_{2\nu}+ih_{2\nu+1})}{\partial\bar{z}^2}=0 \qquad (69)$$

引進函數 h_ν，這裏 $\{F_\nu\}$ 爲E 的封閉就範直交系. 後一關係式表明，h_ν 滿足廣義的柯西-黎曼方程，也就是，我們有

$$h_{2\nu,xx}-h_{2\nu,yy}=2h_{2\nu+1,yx}; \ 2h_{2\nu,xy}=h_{2\nu+1,yy}-h_{2\nu+1,xx}; \\ h_{2\nu,xx}=\frac{\partial^2 h_{2\nu}}{\partial x^2}. \qquad (70)$$

應用這些關係式我們容易得到

$$\delta_{\nu\mu}=\iint_B F_\nu \overline{F}_\mu \, d\omega=\iint_B \frac{\partial^2(h_{2\nu}+ih_{2\nu+1})}{\partial z^2}\cdot\left(\overline{\frac{\partial^2(h_{2\mu}+ih_{2\mu+1})}{\partial z^2}}\right)d\omega=$$

$$=\{h_{2\nu},\ h_{2\mu};-1\}-i\{h_{2\nu},\ h_{2\mu+1};-1\}=$$

$$=\{h_{2\nu},\ h_{2\mu+1},-1\}+i\{h_{2\nu},\ h_{2\mu};-1\}, \qquad (71)$$

亦即 $\{h_\nu\}$ 在度量 $\{\varphi,\psi;\ -1\}$ 的意義下，爲(52)的實解的一個封閉就範直交系，這就是所要求的關係式。這個事實使得我們可以應用複直交函數去解決某些羅賓(Robin)問題，即混合邊值問題。假設對一個具波阿松比率 σ 的物理系統加上了如下的邊界條件：

$$R(\varphi;\ \sigma)=M(\varphi;\ \sigma)+(1+\sigma)P(\varphi), \qquad (72)$$

$$S(\varphi;\ \sigma)=V(\varphi;\ \sigma)+(1+\sigma)Q(\varphi), \qquad (73)$$

這裏 $P(\varphi)=2\varphi_{xy}\sin\alpha\cos\alpha-\varphi_{xx}\sin^2\alpha-\varphi_{yy}\cos^2\alpha$，而 $Q(\varphi)=$ $=(\varphi_{xx}-\varphi_{yy})\sin\alpha\cos\alpha-\varphi_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$. 若取綫積分

$$(\varphi,\ \psi;\ \delta)=\int_b\left[R(\varphi,\ \sigma)\frac{\partial\psi}{\partial n}+S(\varphi,\ \sigma)\psi\ \right]ds, \quad (74)$$

作爲我們的度量，則我們看到，任何一個在這個度量的意義下的就範直交函數族將使我們能解決上述的羅賓問題． 但是，如果我們寫出 R 和 S 通過 φ 來表達的完全表示式，則容易看到

$$(\varphi,\psi;\sigma)=\int_b[2(\varphi_{xx}\cos^2\alpha+2\varphi_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+\varphi_{yy}\sin^2\alpha)-$$

$$-\Delta\varphi]\frac{\partial\psi}{\partial n}ds+\int_b\left(2\frac{\partial}{\partial s}[(\varphi_{xx}-\varphi_{yy})\sin\alpha\cos\alpha-\varphi_{xy}(\cos^2\alpha-\right.$$

$$\left.-\sin^2\alpha)]-(\varphi_{xxx}+\varphi_{xyy})\cos\alpha-(\varphi_{yyy}+\varphi_{yxx})\sin\alpha\right)ds. \qquad (75)$$

將此與(66)，(67)，(68)比較；我們得到

$$(\varphi,\ \psi;\ \sigma)=\{\varphi,\ \psi;\ -1\}. \qquad (74)$$

因此，複值函數供給了我們所希望的封閉法直交系。

Aronszajn 3, 4.
Bergman 3, 17, 28.
Bergman and Schiffer 1, 2, 3, 6, 7.
Courant-Hilbert.
Hellinger and Töplitz.
Lichtenstein.
Zaremba.

XI. 二元複變函數與僞共形映照[1)]

1. 基本理論

在這章中我們將假設讀者已經熟悉了很多古典的分析論中的二元複變函數論的材料.

二個複變數 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 的一個解析函數 $f(z_1,z_2)$ 在四維的歐氏空間的原點附近正則,可以展成二重冪級數

$$f(z_1, z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z_1^m z_2^n. \tag{1}$$

柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}=0 \qquad (k=1, 2) \tag{2}$$

爲 $f(z_1, z_2)$ 所滿足,此處

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}+i\frac{\partial}{\partial y_k}\right],$$

並且或是性質(1)或是性質(2)都可以作爲解析性的定義. 對於一組二元的二解析函數

$$w_k=f_k(z_1, z_2), \qquad k=1, 2, \tag{3}$$

將四度空間可以局部地一一變換到另一個域,若約可比式

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(z_1, z_2)}$$

不等於零. 這樣的變換叫作僞共形的.

在理論中遭遇的困難之一是我們不能直觀此空間而在一個變

1) 這一章只包含了如何應用本書中所展開的方法到多複變解析函數的一個概要. 更詳細的介紹可以在柏格曼[20, 23, 30]中找到. 讀者也能在那裏找到更完全的與這些問題有關的文獻.

這裏只談到二個變數,但是這個方法,一般地可以同樣用來討論 n 個變數的函數. 參閱 Behnke 與 Thullen; Bochner 與 Martin 2; Fuchs 5; Osgood 21.

數的情形我們可以在平面上工作． 但是，我們可以取 y_2 表示時間而 x_1, y_1, x_2 表示三度空間． 於是我們能够用如同圖 9.1—9.5 和 10.1—10.5 所分別給的一系列的草圖來畫出四度區域如雙柱體

$$|z_1|<r_1 \qquad |z_2|<r_2$$

和超球

$$|z_1|^2+|z_2|^2<r^2$$

來．每一個瞬那表示了域與 $y_2=$ 常數的交而 $y_2=-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ 及 1．實際上，如同電影一樣的四度區域的觀察是有不少幫助的．

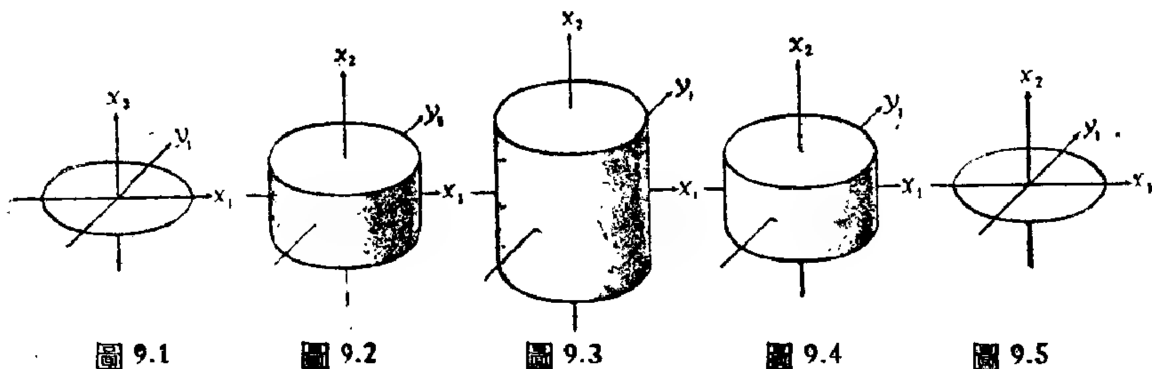


圖 9.1　圖 9.2　圖 9.3　圖 9.4　圖 9.5

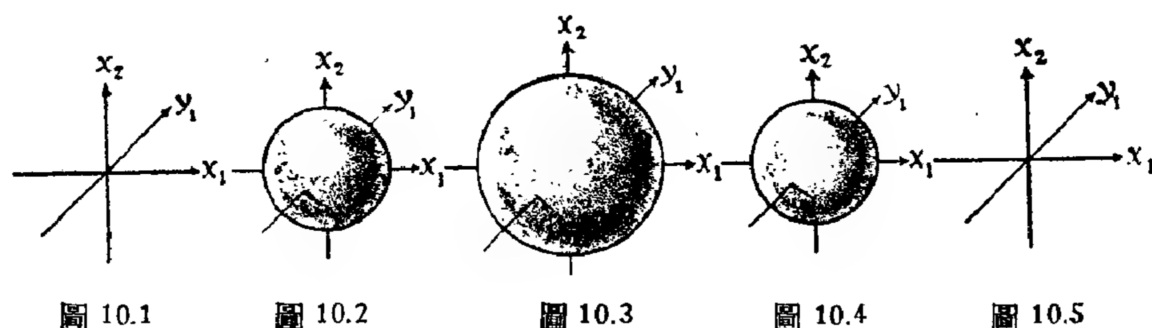


圖 10.1　圖 10.2　圖 10.3　圖 10.4　圖 10.5

這是重要的：注意到在二個複變數函數對於域 B 的邊界所起的作用是不同的，令 B 是雙柱體

$$|z_1|<r_1, \qquad |z_2|<r_2.$$

又令 $f(z_1, z_2)$ 在 B 中解析．於是由柯西積分公式

$$f(z_1, z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1} d\zeta_1\int_{C_2}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)d\zeta_2}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}. \tag{4}$$

積分只是取在二度的子集 C_1C_2

$$C_1: |\zeta_1|=r_1, \qquad C_2: |\zeta_2|=r_2 \tag{5}$$

上．於是 $f(z_1, z_2)$ 只爲集(5)上的值所決定；這樣一個集叫做 B 域的特徵流形． 並不是所有的域都有特徵流形，但是注意到一個函

數在具有特徵流形的域 B 的一個子域 B' 的閉包上解析且 B' 含有特徵流形，是必須在整個 B 中解析的(亦可參閱 § 6)．

因爲在二元複變函數中沒有簡單的類似於圓的域，這就必須去考慮一大類具有可以比較性質的區域．一個關於，例如原點的圓型域 C，我們瞭解爲一個域，它與每一個解析面 $a_1z_1+a_2z_2=0$ 的交是一個中心在原點的圓．若我們記圓的半徑爲 $\varphi(s)$，$s=-\frac{a_2}{a_1}$，我們發現 C 的邊界可以用方程

$$|z_1|^2+|z_2|^2=\varphi(s)^2, \qquad \frac{z_1}{z_2}=s$$

來描寫．顯然 C 擁用映爲自己的僞共形映照變換羣

$$z_1^*=e^{i\theta}z_1, \quad z_2^*=e^{i\theta}z_2, \qquad 0\leqslant\theta<2\pi. \tag{6}$$

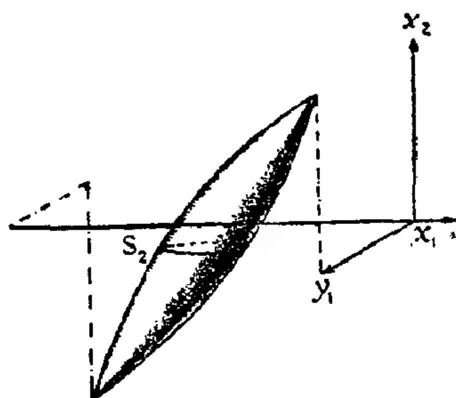


圖 11.1

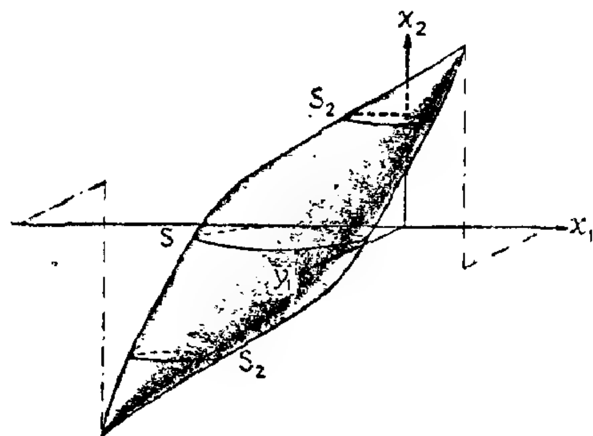


圖 11.2

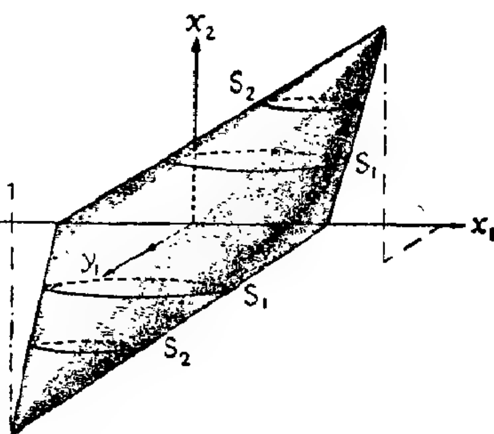


圖 11.3

在圖 11.1—11.3，依舊給出圓型域．我們注意到變換(6)使頂

點變成自己，且在圖中的圓片 $S_k(k=1, 2)$ 也變成自己．

二元複變函數論最重要的域之中有林赫特 (Reinhardt) 域．這些是具有變換羣

$$z_1^*=e^{i\theta_1}z_1,\quad z_2^*=e^{i\theta_2}z_2,\quad 0\leqslant\theta_1<2\pi,\quad 0\leqslant\theta_2<2\pi \tag{7}$$

的圓型域，當域的中心移到原點後這羣比羣(6)較大．雙柱體和超球是林赫特域的特例．

2. 二複變數的直交函數

在一個變數的解析函數的情形中很多有效的方法並不能在二個變數時很快地給出拓廣．值得注意的是，直交函數方法，只要很少形式上的變動，可以同樣地應用到二元函數論上．

在四維有界域 B 中我們定義滿足

$$J_B(f)=\iiiint_B |f|^2\,d\omega<\infty$$

的二個複變數解析函數 $f(z_1, z_2)$ 的函數族 $\mathfrak{L}^2(B)$，這裏 $d\omega= =dx_1dx_2dy_1dy_2$ 是體積元素． 我們在族 $\mathfrak{L}^2(B)$ 中引進一個解析函數的封閉系 $\{\varphi_\nu(z_1, z_2)\}$，它們滿足就範直交化條件

$$J_B(\varphi_\nu, \overline{\varphi}_\mu)=\iiiint_B \varphi_\nu\overline{\varphi}_\mu\,d\omega=\delta_{\nu\mu},$$

而存在性的證明可以沿着第 I 章的路綫進行．爲了模仿那章中的極小問題，我們只要排列偏導數

$$f_{mn}(z)=\frac{\partial^{m+n}f(z_1, z_2)}{\partial z_1^m\,\partial z_2^n}$$

爲如下的形態：

$$\begin{array}{ccccc}
(0\,0) & (0\,1) & (0\,2) & (0\,3) & \cdots\\
(1\,0) & (1\,1) & (1\,2) & (1\,3) & \cdots\\
(2\,0) & (2\,1) & (2\,2) & (2\,3) & \cdots\\
(3\,0) & (3\,1) & (3\,2) & (3\,3) & \cdots\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}$$

即，我們寫下 (00), (10), (01), (20), $\cdots$． 在系 $\{\varphi_\nu\}$ 的歸納定義的第 n 步，就範化條件是：如同 ϕ 自己一樣，$\varphi_n(z_1,z_2)$ 的前 $(n-2)$

個偏導數在B中的定點$\zeta=(\zeta_1, \zeta_2)$上爲零，而第$(n-1)$個爲1.

我們可以定義B域的核函數爲

$$K_B(z, \bar{\zeta})=K_B(z_1, z_2; \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)=\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z_1, z_2)\overline{\varphi_\nu(\zeta_1, \zeta_2)}. \quad (8)$$

$K_B(z, \bar{\zeta})$與系$\{\varphi_\nu\}$無關且對於四重複分$J_B(f)$有通常的極值性質．我們將繼續用簡寫$z=(z_1, z_2)$，$\zeta=(\zeta_1, \zeta_2)$，等等.

對於中心在原點的林赫特圓型域C，冪$z_1^m z_2^n$顯然是直交的；因而

$$K_C(z, \bar{\zeta})=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^m z_2^n \bar{\zeta}_1^m \bar{\zeta}_2^n}{a_{mn}}, \quad (9)$$

而

$$a_{mn}=\iiiint_C |z_1|^{2m}|z_2|^{2n}\, d\omega.$$

對於一般的圓型域，我們說$z_1^{m_1} z_2^{n_1}$與$z_1^{m_2} z_2^{n_2}$直交僅當$m_1+n_1\neq m_2+n_2$．事實上，若

$$|z_1|^2+|z_2|^2<\varphi(s)^2, \qquad \frac{z_1}{z_2}=s,$$

是圓型域C的邊界，我們可以更換變數

$$z_2=z_2, \qquad s=\frac{z_1}{z_2},$$

而且從C割出圓柱體B

$$|z_2|<\varepsilon$$

而有

$$J_C(z_1^{m_1} z_2^{n_1}, \bar{z}_1^{m_2} \bar{z}_2^{n_2})=$$

$$=\alpha\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\iint_{|s|<\infty} s^{m_1}\bar{s}^{m_2}\, ds\, d\bar{s}\times$$

$$\times\iint_{\varepsilon<|z_2|^2<\varphi(s)^2/(1+|s|^2)} z_2^{m_1+n_1+1}\bar{z}_2^{m_2+n_2+1}\, dz_2\, d\bar{z}_2\Big]=0,$$

而α是更換變數時出現的常數．於是，我們有

$$K_C(z, 0)=\frac{1}{\iiiint_C d\omega}. \quad (10)$$

我們發現，在僞共形變換

$$z_1^* = z_1^*(z_1, z_2), \qquad z_2^* = z_2^*(z_1, z_2) \tag{11}$$

下域 B 變到域 B^* 上,我們有

$$K_B(z, \bar{\zeta}) = K_{B^*}(z^*, \bar{\zeta}^*) \frac{\partial(z_1^*, z_2^*)}{\partial(z_1, z_2)} \overline{\left(\frac{\partial(\zeta_1^*, \zeta_2^*)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}\right)}, \tag{12}$$

如同一個變數的情形那樣. $\dfrac{K_B(z, \bar{\zeta})}{K_B(\zeta, \bar{\zeta})}$ 是在條件 $f(\zeta)=1$ 之下使 $J_B(f)$ 極小, 我們記此爲 $M_B^1(z, \bar{\zeta})$. 令 $M_B^{1,0}(z, \zeta)$ 及 $M_B^{0,1}(z, \zeta)$ 是分別在條件

$$f(\zeta)=0, \quad f_{10}(\zeta)=1, \quad f_{01}(\zeta)=0, \tag{13}$$

及

$$f(\zeta)=0, \quad f_{10}(\zeta)=0, \quad f_{01}(\zeta)=1. \tag{14}$$

之下使 $J_B(f)$ 極小的函數. 於是,若變換(11)是如此就範化

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1^*}{\partial z_1} &= 1, & \frac{\partial z_1^*}{\partial z_2} &= 0, \\ \frac{\partial z_2^*}{\partial z_1} &= 0, & \frac{\partial z_2^*}{\partial z_2} &= 1, \end{aligned} \tag{15}$$

我們發現 $M_B^{1,0}$ 和 $M_B^{0,1}$ 滿足同樣的如同 K_B 的變換關係. 於是函數

$$\frac{M_B^{1,0}}{M_B^1}, \qquad \frac{M_B^{0,1}}{M_B^1} \tag{16}$$

在就範化僞共形映照下是不變的. 對於中心在原點的圓型域可以很快地證得公式[1)]

$$\frac{M_C^{1,0}(z, 0)}{M_C^1(z, 0)} = z_1, \quad \frac{M_C^{0,1}(z, 0)}{M_C^1(z, 0)} = z_2. \tag{17}$$

應用關係式(17),可以證明下面的定理.

一個僞共形變換將一個圓型域變到另一個圓型域且使得中心相應必須且有形式

$$z_1^* = az_1 + bz_2, \quad z_2^* = cz_1 + dz_2, \tag{18}$$

此處我們假設中心是在原點.

注意到函數(16)可以看作任一有界域到它的*僞共形等價類的*

---

1) 在(17)中, 如同在一些另外的公式中那樣, 0 表示原點 (0, 0); 而在另一些地方,它表示數零. 這是從上下文中容易明白的.

一個表示區域至少在綫性變換(18)之内.

一般來說，並不存在一個僞共形映照將一個單連通有界的四維區域變到另一個.

我們證明,由於剛才得到的定理,超球

$$|z_1|^2+|z_2|^2<1 \tag{19}$$

並不能映到雙柱體

$$|z_1|<1,\quad |z_2|<1 \tag{20}$$

之上。我們說一個單連通區域的意思是可以拓撲地映到一個超球上。

假設存在一個將(19)映到(20)上去的映照，於是原點可以變到點 ζ_1, ζ_2, 另一映照

$$z_1^*=\frac{z_1-\zeta_1}{1-\bar{\zeta}_1 z_1},\quad z_2^*=\frac{z_2-\zeta_2}{1-\bar{\zeta}_2 z_2}$$

將 ζ_1, ζ_2 映爲原點。於是存在一個具有形式(18)的映照將(19)映到(20)之上,這得到一個明顯的矛盾.

這個定理是邦加萊 (Poincaré) 的,證明了即使在最簡單的拓撲區域,僞共形映照的等價問題是存在的。 對於這個問題知道得很少，因爲所有黎曼映照定理的證明的方法是强有力地依賴於只能應用於平面上的方法。

3. 不變度量

在第 III 章中引進的度量的最大方便 是在於定義中不依賴於黎曼映照定理. 於是立刻可以推廣到不與黎曼映照定理相當的情形中去. 應用到二元函數論和僞共形映照上,這個度量導出不同形態的偏差定理,而且可以定義許多有意義的不變量.

若我們微分從(12)得來的關係式

$$K_B(z,\bar{z})=K_{B^*}(z^*,\bar{z}^*)\left|\frac{\partial(z_1^*,z_2^*)}{\partial(z_1,z_2)}\right|^2, \tag{21}$$

且應用柯西-黎曼微分方程(2),我們有

$$\frac{\partial^2\log K_B(z,\bar{z})}{\partial z_m\,\partial\bar{z}_n}=\sum_{p,q=1}^{2}\frac{\partial^2\log K_B(z,\bar{z})}{\partial z_p^*\,\partial\bar{z}_q^*}\frac{\partial z_p^*}{\partial z_m}\frac{\partial\bar{z}_q^*}{\partial\bar{z}_n},\ n,m=1,2. \tag{22}$$

令

$$T_{m\bar{n}}(z)=\frac{\partial^2 \log K_B(z,\bar{z})}{\partial z_m\,\partial \bar{z}_n} \tag{22'}$$

我們證明下面的結果：

對於任意正的僞共形不變量 $J(z)$，關係式

$$ds^2=J\sum_{m,n=1}^{2} T_{m\bar{n}}\,dz_m\,d\bar{z}_n \tag{23}$$

定義一個不變度量且 $T_{m\bar{n}}$ 的海密脫形式是完整的.

不變性是(22)輕易的推論. 由於第 II 章的考慮我們可以證明在條件 $f(z)=0$, $u_1f_{10}(z)+u_2f_{01}(z)=1$ 下（此地 u_1, u_2 是二個固定的常數），$J_B(f)$ 的極小是

$$\lambda_B^{(2)}=\frac{1}{K_B(z,\bar{z})\sum_{m,n=1}^{2} T_{m\bar{n}}(z)u_m\bar{u}_n}; \tag{24}$$

因而海密頓形式的完整性就得到了.

最方便的度量(23)是當 $J=1$ 時. 去考慮不變量

$$J(z)=\left(\frac{K_B(z,z)}{T_{1\bar{1}}(z)\,T_{2\bar{2}}(z)-|T_{1\bar{2}}(z)|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

也是有用的.

我們轉回來推廣雪瓦茲引理. 如果我們在度量(23)中用算式(25), 四維空間的體積元素變成

$$d\Omega_B(z)=K_B(z,\bar{z})\,d\omega(z), \tag{26}$$

此處 $d\omega(z)$是歐氏體積元素.

於是若 $G\subset B$, 我們有

$$d\Omega_B(z)\leqslant d\Omega_G(z), \qquad z\in G. \tag{27}$$

事實上, $K_B(z,\bar{z})$ 是在條件 $f(z)=1$ 之下的 $J_B(f)$ 的極小之倒數, 而 $K_G(z,\bar{z})$ 有相同的性質. 於是

$$K_B(z,\bar{z})\leqslant K_G(z,\bar{z}), \qquad z\in G,$$

於是(27)就得到了.

若

$$z_1=z_1(u_1,u_2),$$

$$z_2 = z_2(u_1, u_2) \tag{28}$$

定義了四維區域 B 中的一個面，這裏實變數 u_1 和 u_2 是在 u_1, u_2 平面的某個區域中變動，於是我們定義了面(28)的 B-面積

$$\iint_T (K_B(z(u), \overline{z(u)}))^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right| du_1\, du_2,$$

這裏 $u = (u_1, u_2)$.

於是 B-面積元素是

$$dA_B = (K_B(z, \bar{z}))^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right| du_1\, du_2;$$

這比 K_B 乘歐氏面積元素來得小，因爲

$$\left| \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right|^2 = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + i \frac{\partial y_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + i \frac{\partial y_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} + i \frac{\partial y_2}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} + i \frac{\partial y_1}{\partial u_2} \end{matrix} \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left| \begin{matrix} \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 + \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial y_k}{\partial u_1} \right)^2, & \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial y_k}{\partial u_1} \frac{\partial y_k}{\partial u_2} \\ \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial y_k}{\partial u_1} \frac{\partial y_k}{\partial u_2}, & \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 + \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial y_k}{\partial u_2} \right)^2 \end{matrix} \right|.$$

類似於(27)，我們有下面的結果：

若 $G \subset B$，則

$$dA_B(z) \leqslant dA_G(z), \qquad z \in G; \tag{29}$$

B-面積是僞共形不變量.

4. 比 較 域

這一節中我們將要導出僞共形映照的一個不等式. 我們的方法的基本思想是表示區域 B 的幾何不變量，它是用適當選擇的就範化條件下的模 $J_B(f)$ 的極小值 λ 來表示的. 極小值 λ 的單調性引出我們所需的不等式.

這個方法的應用是很普遍的，我們用來求得在僞共形變換下的歐氏綫素 $d\sigma = (|dz_1|^2 + |dz_2|^2)^{\frac{1}{2}}$ 的偏差的估計. 爲此目的我們引進非歐度量(23)而 $J = 1$，這是在僞共形映照下的不變量. 爲了

得到需要的估計，我們首先借助於內、外的比較域來估計非歐的量，然後，第二步來決定歐氏與非歐長度之間的關係.

由於在(24)中量 $\lambda_B^{(2)}$ 的極小性質，我們有

$$\lambda_G^{(2)} \leqslant \lambda_B^{(2)} \leqslant \lambda_E^{(2)}, \tag{30}$$

若域 G 和 E 滿足

$$G \subset B \subset E.$$

應用記號

$$H_B(u, \bar{u}) = \sum_{n,m=1}^{2} T_{m\bar{n}} u_m \bar{u}_n, \tag{31}$$

由(24)，我們有

$$H_B = \frac{1}{\lambda_B^{(2)} K_B}. \tag{32}$$

從(32)有

$$H_E \frac{K_E}{K_G} = \frac{1}{\lambda_E^{(2)} K_G} \leqslant \frac{1}{\lambda_B^{(2)} K_B} = H_B \leqslant \frac{1}{\lambda_G^{(2)} K_E} = H_G \frac{K_G}{K_E}.$$

這些不等式對於(31)中任意的 u_1 和 u_2 都對. 由於(23)於是我們有

$$\frac{K_E}{K_G}\, ds_E^2 \leqslant ds_B^2 \leqslant \frac{K_G}{K_E}\, ds_G^2, \tag{33}$$

這裏指標表示度量在那個域上定義.

我們現在可以來計算在原點有半徑 ρ 的超球的情形的非歐綫素 ds. 用直交系(9)，超球的核函數容易求得爲

$$K = \frac{2\rho^2}{\pi^2(\rho^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2)^3}. \tag{34}$$

從(22)，我們有

$$T_{1\bar{1}} = \frac{3}{\tau} + \frac{3|z_1|^2}{\tau^2}, \qquad T_{2\bar{2}} = \frac{3}{\tau} + \frac{3|z_2|^2}{\tau^2},$$

$$T_{1\bar{2}} = \frac{3\bar{z}_1 z_2}{\tau^2}, \qquad T_{2\bar{1}} = \frac{3 z_1 \bar{z}_2}{\tau^2},$$

這裏利用了簡寫

$$\tau = \rho^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2.$$

於是我們有

$$\frac{\tau^2}{3} ds^2 = \tau(|dz_1|^2 + |dz_2|^2) + |\bar{z}_1 dz_1 + \bar{z}_2 dz_2|^2.$$

若$d\sigma$表示由

$$d\sigma^2 = |dz_1|^2 + |dz_2|^2$$

定義的歐氏綫素，於是我們有估計

$$\frac{\tau^2}{3} ds^2 \leqslant \tau\, d\sigma^2 + (|z_1|^2 + |z_2|^2)\, d\sigma^2 = \rho^2 d\sigma^2,$$

$$\frac{\tau^2}{3} ds^2 \geqslant \tau\, d\sigma^2,$$

即

$$\frac{3}{\tau} d\sigma^2 \leqslant ds^2 \leqslant \frac{3\rho^2}{\tau^2} d\sigma^2.$$

特別，在超球的中心，我們有

$$ds^2 = \frac{3}{\rho^2} d\sigma^2.$$

現在令$z_1^* = z_1^*(z_1, z_2)$，$z_2^* = z_2^*(z_1, z_2)$表示一個僞共形映照將區域B映到另一個單葉域B^*之上，使得原點變成原點． 再令B和B^*分別包含在超球$|z_1|^2 + |z_2|^2 < R^2$及$|z_1^*|^2 + |z_2^*|^2 < R^{*2}$之內，且令$B$和$B^*$包有超球$|z_1|^2 + |z_2|^2 < r^2$及$|z_1^*|^2 + |z_2^*|^2 < r^{*2}$． 因爲，由(34)，以半徑$\rho$的超球的中心的核函數的值是$\frac{2}{\pi^2 \rho^4}$，又因爲非歐長度是在僞共形映照下不變的，由(33)我們有

$$\frac{3}{R^2} \frac{r^4}{R^4} d\sigma^2 \leqslant ds^2 = ds^{*2} \leqslant \frac{3}{r^{*2}} \frac{R^{*4}}{r^{*4}} d\sigma^{*2},$$

從而

$$\frac{d\sigma^*}{d\sigma} \geqslant \frac{r^{*3} r^2}{R^3 R^{*2}}.$$

相仿的估計在另一方面得到， 我們最後得到在僞共形映照下的歐氏長度的偏差的界限是

$$\frac{r^{*3} r^2}{R^3 R^{*2}} \leqslant \frac{d\sigma^*}{d\sigma} \leqslant \frac{R^{*3} R^2}{r^3 r^{*2}}.$$

5. 有固定羣的域

若B是一個包有點$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$的有界四維區域． B的僞共

形變換使B映於自己之上且使點ζ固定的羣Γ稱爲B在ζ的固定羣.

若B是一有界的,單連通四維域在$\zeta\in B$處有固定羣,於是由函數

$$\frac{M^{1,0}}{M^1}, \qquad \frac{M^{0,1}}{M^1} \tag{35}$$

所定義的表示域中,Γ只含有仿射變換.

不失一般性,我們假設,$\zeta=0$. 於是Γ含有變換

$$z_1^*=a_{11}z_1+a_{12}z_2, \qquad z_2^*=a_{21}z_1+a_{22}z_2. \tag{36}$$

這可以看作容有固定羣的域的黎曼映照定理的推廣.

假設B由函數

$$\begin{aligned} z_1^* &= \alpha_{11}z_1+\alpha_{12}z_2+\cdots, \\ z_2^* &= \alpha_{21}z_1+\alpha_{22}z_2+\cdots, \\ D_0 &= \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}\neq 0 \end{aligned} \tag{37}$$

映照到自己. 令

$$D(z)=\frac{\partial(z_1^*, z_2^*)}{\partial(z_1, z_2)}.$$

於是由$M_B^1(z, 0)$的唯一性和變換關係(12)我們有

$$M_B^1(z, 0)=\frac{M_B^1(z^*(z), 0)D(z)}{D_0}. \tag{38}$$

由變換(37),在B中每一個函數$f^*(z^*)$,這樣就範化

$$f^*(0)=0, \ \ f_{10}^*(0)=1, \ \ f_{01}^*(0)=0, \tag{39}$$

變成函數$f(z)=f^*(z^*(z))$,使得滿足條件

$$f(0)=0, \ \ f_{10}(0)=\alpha_{11}, \ \ f_{01}(0)=\alpha_{12}. \tag{40}$$

同樣,每一個滿足(40)的函數$f(z)$由(37)變到滿足(39)的函數$f^*(z^*)=f(z(z^*))$. 在就範化(40)下使$J_B(f)$極小的函數記爲$M_B^{\alpha_{11},\alpha_{12}}(z, 0)$,於是我們必須有

$$M_B^{\alpha_{11},\alpha_{12}}(z, 0)=\frac{M_B^{1,0}(z^*(z), 0)\, D(z)}{D_0}. \tag{41}$$

同樣

$$M_B^{\alpha_{21},\alpha_{22}}(z, 0)=\frac{M_B^{0,1}(z^*(z), 0)D(z)}{D_0}. \tag{42}$$

因爲矩陣$(X_k)^{n\downarrow}$(參閱第 II 章公式(7))在這個情形，有形式

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix}.$$

且可以分解爲

$$\alpha_{11}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_{12}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

於是

$$M_B^{\alpha_{11},\alpha_{12}}(z,0)=\alpha_{11}M_B^{1,0}(z,0)+\alpha_{12}M_B^{0,1}(z,0), \tag{43}$$

且同樣

$$M_B^{\alpha_{21},\alpha_{22}}(z,0)=\alpha_{21}M_B^{1,0}(z,0)+\alpha_{22}M_B^{0,1}(z,0). \tag{44}$$

我們注意到應用第 II 章的方法，我們可以用形式

$$M_B^{\alpha_{11},\alpha_{12}}(z,0)=\alpha_{12}\frac{\begin{vmatrix} K(z,0) & K_{0010}(z,0) & K_{0001}(z,0) \\ K & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{1000} & K_{1010} & K_{1001} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{1000} & K_{1010} & K_{1001} \\ K_{0100} & K_{0110} & K_{0101} \end{vmatrix}}-$$

$$-\alpha_{11}\frac{\begin{vmatrix} K(z,0) & K_{0010}(z,0) & K_{0001}(z,0) \\ K & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{0100} & K_{0110} & K_{0101} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K & K_{0010} & K_{0001} \\ K_{1000} & K_{1010} & K_{1001} \\ K_{0100} & K_{0110} & K_{0101} \end{vmatrix}}=$$

$$=\alpha_{11}M_B^{1,0}(z,0)+\alpha_{12}M_B^{0,1}(z,0),$$

$$K_{nmpq}=\left.\frac{\partial^{n+m+p+q}K_B(z,\zeta)}{\partial z_1^n\,\partial z_2^m\,\partial\bar{\zeta}_1^p\,\partial\bar{\zeta}_2^q}\right|_{z=0,\,\bar{\zeta}=0}$$

來表達$M_B^{\alpha_{11},\alpha_{12}}$. 組合關係式(43), (44)與關係式(41), (42)並除以(38)，我們有

$$\frac{M_B^{1,0}(z^*,0)}{M_B^1(z^*,0)}=\alpha_{11}\frac{M_B^{1,0}(z,0)}{M_B^1(z,0)}+\alpha_{12}\frac{M_B^{0,1}(z,0)}{M_B^1(z,0)}, \tag{45}$$

$$\frac{M_B^{0,1}(z^*,0)}{M_B^1(z^*,0)}=\alpha_{21}\frac{M_B^{1,0}(z,0)}{M_B^1(z,0)}+\alpha_{22}\frac{M_B^{0,1}(z,0)}{M_B^1(z,0)}, \tag{46}$$

$$z^*=z^*(z).$$

(45)和(46)證明了這一節開始時所敍述的定理.

由此公式,應用最小積分方法(參閱 40 頁), 可以得到不同的 $M_B^{\alpha_{11},\alpha_{12}}$ 的界限.

6. 特徵流形和拓廣函數族

如上節所示, 核函數的引入和極小積分原理允許關聯到區域內部函數的定理的拓廣,例如,含有雙曲度量的討論. 若我們應用核函數的方法,不同偏差定理的導出,與一個變數相當的二個複變數函數的一些結果的導出,只是一個技巧問題. 當我們要去拓廣涉及區域邊界的一些定理時,情况就完全改變了, 例如,依賴於調和度量原理的一些結果. 在這種情形,函數不只是在區域內部而且在邊界上討論. 下面,我們將指出從一個複變數到多個複變數時所產生的幾個基本區別.

(1) 對照於一個複變數, 在二個複變數解析函數理論中的幾何概念與四度歐氏空間幾何中的完全不一樣, 所以我們稱它爲**二個複變數空間的幾何**. 當一個複變數函數在一個孤立點取定值,而一個二個複變數函數在一個解析面

$$z_1=p_1(Z),\quad z_2=p_2(Z),$$

取定值,此處 p_1 與 p_2 是複參數 Z 的解析函數. 一族

$$z_1=p(Z,\lambda),\qquad z_2=q(Z,\lambda),\quad (\lambda\text{ 是實的})$$

組成一個解析超曲面. 於是在二個複變數的幾何中的基本元素是:解析面和超曲面;由有限張解析超曲面圍成的區域;等等.

(2) 二個複變數函數的實部和虛部的微分方程不再是橢圓型了.

讓我們更詳細地來討論在(1)和(2)中指出的區別.

一個二元複變數函數是在四度空間的一區域上定義, 有一個

三度空間的流形作爲它的邊界. 從二元複變數函數論的觀點來看,無論如何,這個邊界不再像一個複變數函數的情形的邊界曲綫那樣在起作用. 爲了得到一個相仿的情況,我們只考慮由有限個

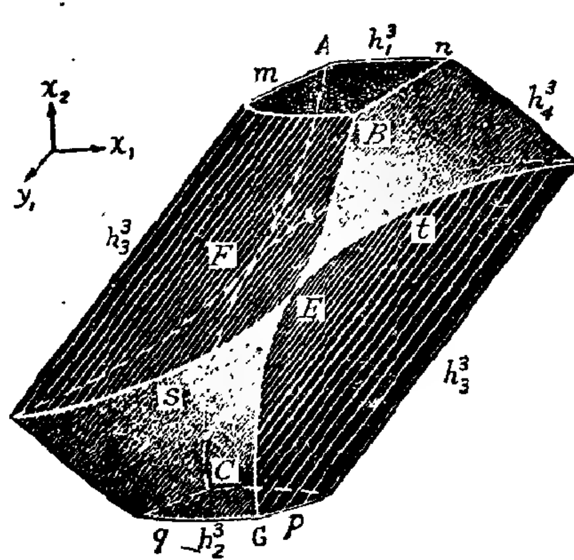


圖 12.1

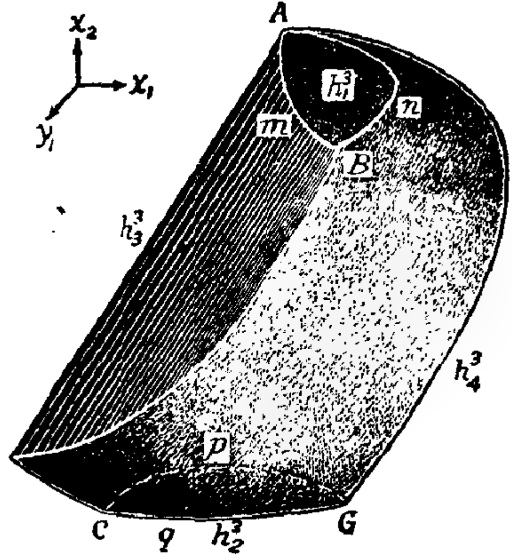


圖 12.2

解析超曲面所圍成的區域.

令 B 是有有限個解析超曲面圍成的四度空間的區域. 屬於二個或更多解析超曲面的交的 B 的邊界點組成二維的流形 D^2,叫作 B 的特徵流形.

爲了說明邊界的幾何結構, 較詳細地來討論一個例子是有益的. 因此,我們應用 144 頁上的觀察方法. 圖 12.1 到 12.4 看作由四段解析超曲面,它們的方程是

$$z_1=Z_1,\qquad z_2=1+i\lambda_1,\ -\infty<\lambda_1<\infty,\ Z_k=X_k+iY_k,\tag{47.1}$$

$$z_1=Z_2,\qquad z_2=-1+i\lambda_2,\qquad -\infty<\lambda_2<\infty,\tag{47.2}$$

$$z_1=Z_3+e^{i\lambda_3}\qquad z_2=Z_3,\qquad 0\leq\lambda_3\leq 2\pi,\tag{47.3}$$

$$z_1=-Z_4+e^{i\lambda_4}+\cos\lambda_4,\ z_2=Z_4,\qquad 0\leq\lambda_4\leq 2\pi,\tag{47.4}$$

所圍成的域的"電影"[1], 它包有四個"瞬那"相應於 $y_2=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$.

1) 在圖 12.1—12.4 中, 在不同的"瞬那"中的點不用任何下標來加以區別: 例如, 在 12.1 中,應該代替 A 以 A_1; 在 12.2 中,代替以 A_2; 在 12.3 中,以 A_3; 在 12.4 中,以 A_4.

軸 x_1, y_1, x_2 的方向是由一組坐標系來指出. 在所有的情形中,原點都在物體之中. 爲了避免描畫過多的綫,將它畫在外面.

如果我們說域在曲綫內,這暸解爲區域在左邊, 正方向是與在"瞬那"中出現的物體的外法綫相一致.

超曲面(47.1) [(47.2)]的截面$h_1^3[h_2^{(3)}]$，在每一個"瞬那"中出

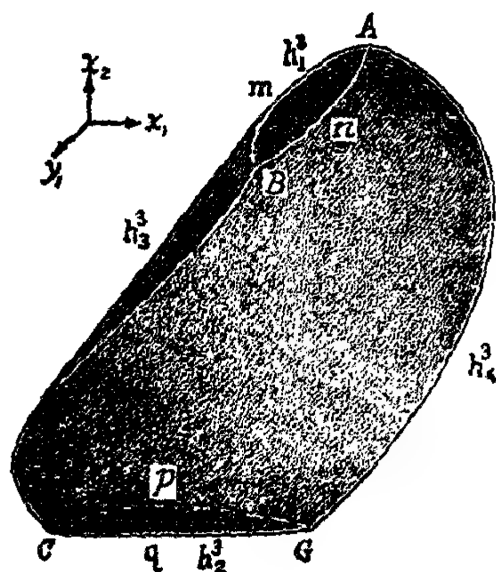


圖 12.3

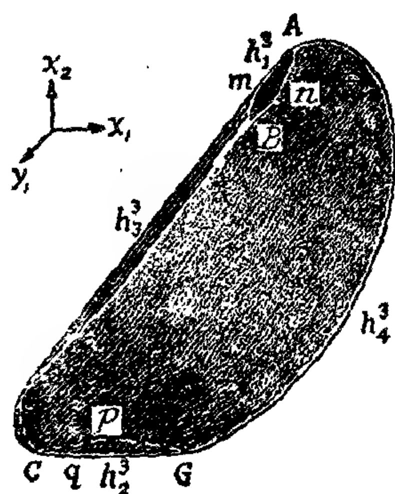


圖 12.4

現為 $x_2=$ 常數由白曲綫 $AmBnA[CpGqC]$ 所圍成的截面. 超曲面 (47.3) 的截面 h_3^3 在圖 12.2 到 12.4 中出現為由 $BmAGpCB$, 在圖 12.1 中為 $EBmAFsE$ 及 $EGpCFtE$ 所圍成. 超曲面(47.4)的截面 h_4^3 在 12.2 到 12.4 中出現為由 $AnBCqGA$ 所圍成, 而在圖 12.1 中為 $AnBEtFA$ 及 $CqGEsFC$ 所圍成.

上述截面 h_1^3 及 h_3^3 的交 $D_{13}^2=h_1^3\cap h_3^3$ 在圖 12.1 到 12.4 中出現為綫 AmB; 交 $D_{14}^2=h_1^3\cap h_4^3$ 出現為 AnB. 交 $D_{23}^2=h_2^3\cap h_3^3$ 及 $D_{24}^2=h_2^3\cap h_4^3$ 分別出現為 CpG 及 CqG, 最後, $D_{34}^2=h_3^3\cap h_4^3$ 在圖 12.2 到 12.4 中出現為 BC 及 AG; 在圖 12.1 中它們出現為 $BEsFA$ 及 $GEtFC$. 和 $D^2=D_{13}^2+D_{23}^2+D_{14}^2+D_{34}^2+D_{24}^2$ 組成特徵流形. 曲綫之和 $k_{134}^1=h_1^3\cap h_3^3\cap h_4^3$ (這出現為點 A 及 B) 與曲綫之和 $k_{234}^1=$ $=h_2^3\cap h_3^3\cap h_4^3$(這出現為 C 和 G)組成特徵曲綫.

如我們所指出的, 在一個解析面上的截面是一組一個參變數的解析面的截面: 例如, $h_1^3=\Sigma_{\lambda_1=-1}^{1} I_1^2(\lambda_1)$. 在每一個"瞬那"對於 $y_2=0$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$; 每一個 $I_1^2(\lambda_1)$ 出現為平面區域由曲綫 $i_1^1(\lambda_1)$ (在每個"瞬那", 曲綫 $AmBnA$)所圍成. 此外, $h_3^3=\Sigma_{\lambda_3=0}^{2\pi} I_3^2(\lambda_3)$. (對於 $y_2=0$) $I_3(0)$ 出現為聯結 CqG 與 EtF (在這情形, 這是圖 12.1 的右面的邊)的綫. 對於 $y_2=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$; 這出現為一綫 (在圖 12.2, 12.3,

12.4 的背面的一邊上)． 其它薄片 $I_3(\lambda_3)$ 在每一瞬那出現為平行於 $I_3(0)$的綫．最後，$h_4^3=\Sigma_{\lambda_4=0}^{2\pi} I_4^2(\lambda_4)$．對於 $y_2=0$，薄片 $I_4(0)$ 出現爲聯結 AnB 與 EtF(圖 12.1 的頂上的邊)的綫．對於 $y_2=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$；這表現爲聯結 AnB 與 AG 的綫．所有其它的薄片出現爲平行於 $I_4(0)$的綫．

從函數論的觀點，特徵流形具有很多性質與在一個變數的情形的邊界曲綫的性質相似：

(1) 可以容易證明在 B 中正則的函數 $f(z_1, z_2)$ 不只是在 B 的邊界上取極大而且在特徵流形 D^2 上取極大．f 的實部也在 D^2 上取極大極小．

(2) 在一些正規的條件下在特徵流形上存在着推廣的柯西公式，使得在 B 內的函數值可以用 D^2 上的值來表達．

具有特徵流形的最簡單的域是雙柱體：$|z_1|<1$，$|z_2|<1$． 這裏解析超曲面的二截面

$$z_1-e^{i\lambda_1}=0, \qquad |z_2|\leqslant 1, \qquad 0\leqslant\lambda_1\leqslant 2\pi$$

和

$$z_2-e^{i\lambda_2}=0, \qquad |z_1|\leqslant 1, \qquad 0\leqslant\lambda_2\leqslant 2\pi$$

組成它的邊界．特徵流形爲

$$|z_1|=1, \qquad |z_2|=1,$$

及柯西公式是

$$f(z_1,z_2)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\lambda_1=0}^{2\pi}\int_{\lambda_2=0}^{2\pi}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}, \quad \zeta_1=e^{i\lambda_1}, \zeta_2=e^{i\lambda_2}.$$

設 B 是由有限個解析超曲面 h_k^3 由 $\phi_k(z_1, z_2, \lambda_k)=0$，$\lambda_k$ 是實的，$k=1, 2, \cdots, n$，的截面所圍成的域． 在一些假設下，屬於邊界 B（若是非空的話）的每一對的解析超曲面的截面的交 D_{ks}^2，$k\neq s$，可以表成形式

$$z_\gamma=\varphi_\gamma^{(k,s)}\equiv\varphi_\gamma^{(k,s)}(\lambda_k, \lambda_s), \qquad \gamma=1, 2,$$

這裏實數 λ_k，λ_s 的實數對(λ_k, λ_s)在 $\lambda_k\,\lambda_s$ 平面上(可能是多重的)域 p_{ks}^2 上變動． 在一些附加條件下，對於每一個在 B 中(閉的)正則的函數 f：

$$f(z_1, z_2)=$$

$$-\frac{1}{8\pi^2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n}\sum_{s=1}^{n}\iint_{p_{ks}^2}\frac{f(\varphi_1^{(k,s)},\varphi_2^{(k,s)})B_{ks}(z_1,z_2;\lambda_k,\lambda_s)d\lambda_k d\lambda_s}{\phi_k(z_1,z_2,\lambda_k)\phi_s(z_1,z_2,\lambda_s)}, \quad (48)$$

此處

$$B_{ks}=\frac{\partial(\varphi_1^{(k,s)},\varphi_2^{(k,s)})}{\partial(\lambda_k,\lambda_s)}\times$$

$$\times\frac{[\phi_s(z_1,z_2,\lambda_s)\phi_k(z_1,\varphi_2^{(k,s)},\lambda_k)-\phi_k(z_1,z_2,\lambda_k)\phi_s(z_1,\varphi_2^{(k,s)},\lambda_s)]}{[\varphi_1^{(k,s)}-z_1][\varphi_2^{(k,s)}-z_2]}.$$

必須注意(48)式中柯西公式的核一般是依賴於域 B，因此並不如在一個複變數時那樣的作爲一個有用的工具，在一個複變數時核 $\frac{1}{\zeta-z}$ 是不依賴於域的.

由於(2)，參閱156頁，一個複變數函數的實部和虛部是一個調和函數，而且對於每一個在邊界上給定的實函數常常存在一個調和函數以已給函數爲其邊界值．另一方面，一個 B- 調和函數，即二個複變數函數的實部和虛部，滿足方程系

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}=0, \qquad k=1,\ 2, \qquad (49)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1\partial y_2}=0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial y_1}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial y_2}=0, \qquad (50)$$

不再是橢圓型了，即使在雙柱體的情形也可以容易看出，在特徵流形 D^2 上已給值並不存在一個 B- 調和函數在 D^2 上以此爲邊界值．這件事建議我們去拓廣 B- 調和函數類使得邊界值問題有解，例如，在雙柱體的情形，拓廣到雙調和函數，即函數滿足(49)，而不必要滿足(50).

雙調和函數的邊界值問題永遠有一解，我們可以爲雙調和函數引進一些概念，例如雙調和度量，格林函數，等等，而在這情況下得到與在一個複變數的情形下展開的那些定理相似的結果．應用這些定理，可以得到在多複變數的半純函數理論中的很多結果．例如，參閱柏格曼[15, 19].

由於雙調和函數在僞共形變換下不再是不變量，我們對於由有限張解析超曲面 $z_\nu=h_\nu^{(k)}(Z_k,\lambda_k)$ $(\nu=1,\ 2)$ 所圍成的任意域

B，以下法引進拓廣的函數族．解析面的每一個截面含有一張邊界超曲面，它有一條在特徵流形 D^2 上的邊界曲綫．於是，若一個實函數定義在特徵流形上，它也可定義在每一個解析面的截面的邊界曲綫上，於是我們可以在解析面上的每一個截面上決定二個變數 $\mathrm{Re}\, Z_k$ 和 Im, Z_k 的調和函數，它具有已給的邊界値．由於這個步驟，對應在 D^2 上的函數値在整個 B 的三度的邊界上定義了．

向域 B 的內部延拓可以有幾種不同的方法，這樣就得出幾種不同的拓廣的族．例如我們引進四個實變數的調和函數它在 B 的三度邊界上具有如上所得的値．

這樣擴張（盡管有時是有用的）在僞共形變換下不是不變量．可以用下面的辦法來引進拓廣函數類[1]（這些是僞共形不變量）．

若 $\psi(z_1, z_2, \zeta)=0$，$|\zeta|\leqslant 1$ 是一族二個參變數的解析超曲面，且令 $\psi(z_1, z_2; e^{i\lambda_k})=0$ 是解析超曲面之一，記爲 $\phi_k(z_1, z_2, \lambda_k)=0$，它的截面屬於 B 的邊界．讓我們假設，域 B 可以表成解析曲面 $\psi(z_1, z_2, \zeta)=0$ 的截面 $P^2(\zeta)$ 的和 $\Sigma_{|\zeta|<1} P^2(\zeta)$．我們進一步假設每一個 $P^2(\zeta)$ 可以表成參數形式 $z_\nu=g_\nu(Z, \zeta)$，$\nu=1, 2, |\zeta|\leqslant 1$，使得（閉）截面 $P^2(\zeta)$ 是複 Z- 平面上的一個域 $L^2(\zeta)$ 的一個一對一的映照．在一些條件下，可以證明邊界曲綫 $p^1(\zeta)$（即 $L^2(\zeta)$ 的邊界曲綫 $l^1(\zeta)$ 的像）在 B 的（三度）邊界上．由於前面所示的步驟，拓廣函數族的函數的値在 $p^1(\zeta)$ 的每一點都已經決定了．映照 $p^1(\zeta)$ 到 $l^1(\zeta)$ 上是一對一的，於是由對應點函數有相同的値的要求，在 $l^1(\zeta)$ 上定義了一個實函數．我們向 $L^2(\zeta)$ 的內部開拓在函數對 $\mathrm{Re}Z$ 和 $\mathrm{Im}Z$ 是調和的，且在 $l^1(\zeta)$ 上限止在取如前所說的値．因爲映照 $P^2(\zeta)\rightleftarrows L^2(\zeta)$ 是一對一的，於是拓廣的函數族的函數定義在 B 的每一點上．

對於每一個拓廣函數類（對應於特徵流形上已給函數 f），我們能够用引進上類和下類的拓廣函數來決定它們的界限．

我們考慮所有在特徵流形上每一點上小於或等於已給函數 f

---

1) 注意到存在着不同的拓廣函數族．我們在此並不討論由拓廣函數族理論中引起的許多問題．

的全部 B- 調和函數. 在 B 上每點函數的全體有極大值. 用此法得到的值的全體組成下類中的一個拓廣函數. 同樣我們能引進上類的拓廣函數.

拓廣類的函數可以在很多問題上有用，特別是：

它們可以應用它 (a) 來求得全純函數和半純函數的研究的阿爾福斯(Ahlfors)和納凡林那(Nevanlinna)方法的推廣；

(b) 來導出關於特徵流形的邊界值的存在性的法都 (Fatou) 類型的定理；

(c) 在等價問題的討論上，即，何時二個(具有特徵流形的)域可以用僞共形變換彼此映照.

在全純函數與半純函數的研究上，我們作出拓廣族的格林函數，用此函數，可以證明相仿的納凡林那第一和第二定理. 應用這些結果可以證明在函數的增長和在曲綫上某一個積分的增長之間的關係，這裏函數 f 在某一個三度流形上取定值.

由於拓廣族的不同函數的比較，對於一個已給的邊界值，可以得出關於二個區域是不是彼此僞共形的結論. 特別，若區域的邊界至少包有三個解析超曲面，同時屬於上述三個超曲面的點的全體，組成一根閉曲綫(特徵曲綫)將特徵流形分成好些部分. 於是，假使我們作出相似於調和度量的函數，即拓廣族中的函數，在上述部分中之一取值爲 1，而在特徵流形的其它部分都是取值爲 0，我們得到與我們在多連通區域對於邊界的不同部分的調和度量相仿的情形. 這就可以同樣地來研究二個區域是不是彼此僞共形等價的. 此外，可以證明拓廣族的這些度量和格林函數是有轉折點的. 這可以用毛斯(Morse)的方法表徵出來. 轉折點的很多性質在僞共形變換下仍予保持.

Aravijskaja.
Behnke 及 Tullen 1.
Bergman 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 30, 31.
Bergman 及 Marcinkiewicz.
Hammerstein.
Martin.
Miniatoff 1, 2.
Oka.
Poincaré.

Bergman 及 Martin.
Bergman 及 Spencer 1, 2.
Bers.
Bochner 2, 3.
Calderon 及 Zygmund.
Cartan 1, 2.
Fuchs, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Gelbart.
Reinhardt 1.
Schiffer 1.
Wachs 1, 2, 3, 4, 5.
Weil 1, 2.
Welke.
Wirtinger.
Zygmund 1, 2.

参考書籍

1. L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktiontheorie*, vols. 1 and 2, Berlin, New York, 1945.

2. S. Bochner and W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton, 1948.

3. C. Carathéodory, *Conformal representation*, Cambridge, 1932.

4. R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, 2d rev. ed., Berlin, 1931.

5. B. Fuchs. *Theory of analytic functions of several complex variables* (Russian), Moscow and Leningrad, 1948.

6. E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, Paris, 1927.

7. D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig-Berlin, 1912.

8. A. Hurwitz and R. Courant, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, 2 vols., rev. and enlarged ed., Berlin, 1925.

9. G. Julia, *Leçons sur la représentation des domaines simplement connexes*, Paris, 1941.

10. ———, *Leçons sur la représentation des aires multiplement connexes*, Paris, 1934.

11. St. Kaczmarz and H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warsaw-Lwów, 1935.

12. O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory*, New York, 1929.

13. G. Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie einschliesslich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten*, Leipzig, 1909.

14. ———, *Integralgleichungen*, Berlin and Leipzig, 1930.

15. P. Lévy, *Leçons d'analyse fonctionelle*, Paris, 1932.

16. P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Paris, 1927.

17. ———, *Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes*, Paris, 1933.

18. I. D. Murnaghan, *Introduction to applied mathematics*, New York, 1948.

19. J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, 1932.

20. R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, 1936.

21. W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, vols 1 and 2, Leipzig and Berlin, 1938, 1929.

22. F. Riesz, *Les systèmes d'equations linéaires à une infinite d'inconnus*, Paris, 1913.

23. M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, Colloquium Publications, Am. Math. Soc., vol. 15, New York, 1932.

24. G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, Colloquium Publications, Am. Math. Soc., vol. 23, New York, 1939.

25. E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford, 1932.

26. V. Volterra, *Theory of functionals*, London, 1931.

27. J. L. Walsh, *Interpolation and approximation in the complex domain*, New York, 1935.

参考文献

AHLFORS, L. V.

[1] *Bounded analytic functions,* Duke Math. J., 1947, pp. 1—11.

[2] *Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions,* Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 24, 1950, pp. 100—134.

ARAVIJSKAJA, E.

Über ein Verfahren zur effektiven Herstellung von vollständigen Orthogonalfunktionensystemen zweier komplexer Veränderlicher, Recueil Math., nouv. ser., vol 2 (44), 1937, pp. 665—672.

ARONSZAJN, N.

[1] *Sur les invariants des transformations dans le domaine de n variables complexes,* Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, 1933, pp. 1579—1581.

[2] *Sur les invariants des transformations dans le domaine de n variables complexes,* Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, 1934, pp. 143—146.

[3] *La théorie des noyaux reproduisants et ses applications,* I, Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 39, 1943, pp. 133—153.

[4] *Reproducing and pseudo-reproducing kernels and their application to the partial differential equations of physics,* Technical Report 5, Preliminary Note, Cambridge, Mass., 1948, Navy Contract N5ori 76—16—NR 043—046.

[5] *Theory of reproducing kernels,* Trans. Am. Math. Soc., vol. 68, 1950, pp. 337—404.

BEHNKE, H. and THULLEN, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veraenderlicher,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 3, 1934.

BERGMAN, S.

[1] *Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen,* Math. Ann., vol. 96, 1922, pp. 237—271 (Thesis, Berlin, 1921).

[2] *Ueber die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transforms,* Math. Zeits., vol. 19, 1923, pp. 8—25.

[3] *Ueber die Bestimmung der elastischen Spannungen und Verschiebungen in einem konvexen Koerper,* Math. Ann.,

vol. 98, 1927, pp. 248—263.

[4] *Zwei Sätze über Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen,* Math. Ann., vol. 100, 1928, pp. 399—410.

[5] *Ueber die Existenz von Repräsentantenbereichen,* Math. Ann., vol. 102, 1929, pp. 430—446.

[6] *Ueber Hermitesche unendliche Formen, die zu einem Bereich gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen zweier komplexen Veränderlichen,* Berichte Berliner Math. Gesellschaft, vol. 26, 1927, pp. 178—184, and Math. Zeits., vol. 29, 1929, pp. 640—677.

[7] *Ueber die schlichten Bereiche in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen,* J. Reine Angew. Math., vol. 162, 1930, pp. 262—270.

[8] *Ueber die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen,* Math. Ann., vol. 104, 1931, pp. 611—636.

[9] *Eine Bemerkung über schlicht Minimalabbildungen,* Berichte Berliner Math. Gesellschaft, vol. 30, 1932, pp. 11—13.

[10] *Ueber den Wertvorrat einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen,* Math. Zeits., vol. 36, 1932, pp. 171—183.

[11] *Über eine in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen auftretende unitare Geometrie,* Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc., vol. 36, 1933, pp. 307—313.

[12] *Über die Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche,* Jahresber. Dtsch. Math. Ver., vol. 42, 1932, pp. 238—252.

[13] *Ueber die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande,* J. Reine Angew. Math., vol. 169, 1933, pp. 1—42, and vol. 172, 1934, pp. 89—128.

[14] *Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas über die Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen,* Math. Ann., vol. 109, 1934, pp. 324—348.

[15] *Sur les fonctions entières et méromorphes de deux variables complexes,* I, Compositio Math., vol. 3, 1936, pp. 136—173.

[16] *Zur Theorie von pseudokonformen Abbildungen,* Recueil Math., nouv. sér., vol. 1(43), 1936, pp. 79—96.

[17] *Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen,* Recueil Math., nouv. sér., vol. 2(44), 1937, pp, 1169—1198.

[18] *Ueber die Kernfunktion gewisser Reinhardtscher Kreiskörper,* Revue Math. de l'Union Interbalkanique, vol. 2, 1939, pp. 41—43.

[19] *Ueber meromorphe Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen,* Compositio Mathematica, vol. 6, 1939, pp. 305—

335.

[20] *Theory of pseudo-conformal transformations and its connection with differential geometry*, Notes on lectures delivered at the Mass. Institute of Technology, 1939—40.

[21] *Partial differential equations, Advanced Topics*, Brown University, Providence, 1941.

[22] *The method of the minimum integral and analytic continuation of functions of complex variables*, Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., vol. 27, 1941, pp. 328—332.

[23] *Sur les fonctions orthogonales de plusieur variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques*, Interscience Publishers 1941, and Mémorial des Sciences Mathématiques, vol. 106, Paris, 1947.

[24] *A remark on the paper "Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes"*, Journal of Math. and Physics, vol. 21, 1942, pp. 141—143.

[25] *The behaviour of the kernel function at boundary points of the second order*, Amer. J. Math., vol. 65, 1943, pp. 679—700.

[26] *A remark on the mapping of multiply-connected domains*, Amer. J. Math., vol. 68, 1946, pp. 20—28.

[27] *Models in the theory of several complex variables*, Amer. Math. Monthly, vol. 53, 1946, pp. 495—501.

[28] *Functions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation*, Duke Math. J., vol. 14, 1947, pp. 349—366.

[29] *Punch-card machine methods applied to the solution of the torsion problem*, Quarterly of Applied Math., vol. 5, 1943. pp. 69—81.

[30] *Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes*, Mémorial des Sciences Mathématiques, vol. 108, Paris, 1948.

[31] *Functions of extended class in the theory of functions of several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 63, 1948, pp. 523—547.

BERGMAN, S. and MARCINKIEWICZ, J.

[1] *Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes*, Fund. Math., vol. 33, 1939—1946, pp. 75—94, and Jour. of Math. and Physics, vol. 21, 1942, pp. 125—141.

BERGMAN, S. and MARTIN, W. T.

[1] *A modified moment problem in two variables*, Duke Math. J., vol. 6, 1940, pp. 389—407.

BERGMAN, S. and SCHIFFER, M.

[1] *A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order*,

Duke Math. J., 1947, pp. 609—638.

[2] *On Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations*, Bull. Am. Math. Soc., vol. 53, 1947, pp. 1141—1151.

[3] *Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic type*, Duke Math. J., vol. 15, 1948, pp. 535—566.

[4] *Kernel functions and conformal maps*, Compositio Math., vol. 8, 1950.

[5] *The theory of kernel functions in conformal mapping*, Transactions of Symposium on Conformal Mapping, National Bureau of Standards. To appear.

[6] *Some linear operators in the theory of partial differential equations*, Proceedings of National Academy of Sciences, vol. 36, 1950.

[7] *Various kernels in the theory of partial differential equations*, Proceedings of National Academy of Sciences, vol. 36, 1950.

[8] *Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics*, in preparation.

BERGMAN, S. and SPENCER, D. C.

[1] *On distortion in pseudo-conformal mapping*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 51, 1942, pp. 133—163.

[2] *A property of pseudo-conformal transformations in the neighborhood of boundary points*, Duke Math. J., vol. 9, 1942, pp. 757—762.

BERS, L.

On bounded analytic functions of two complex variables in certain domains with distinguished boundary surfaces, American Journal of Math., vol. 64, 1942, pp. 514—529.

BIEBERBACH, L.

[1] *Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung*, Rendiconti del circulo mat. di Palermo, vol. 38, 1914, pp. 98—112.

BIERNACKI, M.

Sur quelques majorantes de la théorie des fonctions univalentes, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 201, 1935, pp. 256—258.

BOCHNER, S.

[1] *Ueber orthogonale Systeme analytischer Funktionen*, Math. Zeits., vol. 14, 1922, pp. 180—207 (Thesis, Berlin, 1921).

[2] *Functions of integrable square in several complex variables*, Duke Math. Jour., vol. 4, 1938, pp. 686—706.

[3] *Boundary values of analytic functions in several variables and of almost periodic functions*, Annals of Math., vol. 45, 1944, pp. 708—722.

CALDERON, A. P. and ZYGMUND, A.

Note on boundary values of functions of several complex variables, Annals of Math. Studies, vol. 25.

CARATHÉODORY, C.

[1] *Über die Geometrie der analytischen Abbildungen,* Hamburg Univ. Math. Sem. Abhandl., vol. 6, 1928, pp. 96—145.

CARLEMAN, T.

Ueber die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzreihen, Arkiv foer mat., astr. och fysik, vol. 17, 9, 1923, 30 pp.

CARTAN, H.

[1] *Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique,* Jour. de Math. Pures et Appl., vol. 10, 1931, pp. 1—114.

[2] *Sur les groupes de transformations analytiques,* Actualités Sci. Ind., Exposés Math. IX, Paris, 1935.

COURANT, R., MANEL, B., and SHIFFMAN, M.

A general theorem on conformal mapping of multiply connected domains, Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., vol. 26, 1940, pp. 503—507.

FARRELL, O.

On approximation to analytic functions by polynomials, Bull. Am. Math. Soc., vol. 40, 1940, pp. 908—914.

FUCHS, B.

[1] *Limitations pour la variation d'un angle dans le cas d'une transformation pseudoconforme dans l'espace de deux variables complexes,* Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 200, 1935, pp. 718—720.

[2] *Ueber einige Eigenschaften der pseudokonformen Abbildungen,* Recueil Math., nouv. sér., vol. 1(43), 1936, pp. 569—574.

[3] *Ueber die Gruppe der pseudokonformen Abbildungen eines Bereiches in sich,* Bull. Inst. Math. et Mec. Univ. de Tomsk, vol. 1, 1935—1937, pp. 281—285.

[4] *Zur Theorie der schlichten pseudokonformen Abbildungen,* Comptes Rendus, Acad. Sc., U.R.S.S., nouv. sér., vol. 20, 1938, pp. 3—4.

[5] *Ueber eine Eigenschaft der bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Metrik,* Recueil Math., nouv. sér., vol. 5(47), 1939, pp. 497—504.

[6] *Sur les representations pseudo-conformes d'un domaine sur lui-même avec un point fixe sur la frontière,* Comptes Rendus, Acad. Sc., U.R.S.S., vol. 23, 1939, pp. 497—504.

GARABEDIAN, P.

[1] *Schwarz' lemma and the Szegö kernel function,* Trans. Am.

Math. Soc., vol. 67, 1949, pp. 1—35.

[2] *Distortion of length in conformal mapping*, Duke Math. J., vol. 16, 1949, pp. 439—459.

[3] *A partial differential equation arising in conformal mapping*. To appear.

[4] *A new proof of the Riemann mapping theorem*, Transactions of Symposium on Conformal Mapping, National Bureau of Standards. To appear.

GARABEDIAN, P. and SCHIFFER, M.

[1] *Identities in the theory of conformal mapping*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 65, 1949, pp. 187—238.

[2] *On existence theorems of potential theory and conformal mapping*, Annals of Math., vol. 52, 1950, pp. 164—187.

GELBART, A.

On the growth of properties of a function of two complex variables given by its power series expansion, Trans. Am. Math. Soc., vol. 49, 1941, pp. 199—210.

GREENSTONE, L.

Mapping by analytic functions. Part I: *Conformal mapping of multiply-connected domains*, Trans. Am. Math. Soc. vol. 63, 1948, pp. 125—143.

GROETZSCH, H.

[1] *Ueber einige Extremalprobleme der konformen Abbildung*, I, II, Ber. Akad. Leipzig, vol. 80, 1928, pp. 367—376, and 497—502.

[2] *Ueber die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfachzusammenhängender schlichter Bereiche*, II, Ber. Akad. Leipzig, vol. 81, 1929, pp. 217—221.

GRUNSKY, H.

[1] *Neue Abschätzungen zur Theorie der konformen Abbildung ein- und mehrfachzusammenhängender Bereiche*, Schr. Math. Sem. Univ., Berlin, vol. 1, 1932, pp. 95—140.

[2] *Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfachzusammenhängenden Gebieten*, Jahresberichte der Deutschen Math. Ver., vols. 50 and 52, 1940, 1942, pp. 230—235 and 118—132.

HADAMARD, J.

[1] *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre de plaques élastiques encastrées*, Mémoirs des savants étrangers, vol. 33, 1908.

[2] *Leçons sur le calcul des variations*, Paris, 1910.

HAMMERSTEIN, A.

Über die Approximation von Funktionen zweierkomplexer Veränderlichen durch Polynome, S. Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., 1933, pp. 259—266.

HEINS, M.
A lemma on positive harmonic functions, Ann. of Math., vol. 52, 1950, pp. 568—573.
HELLINGER, E. and TÖPLITZ, O.
Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Enz. Math. Wiss., II, 3.
KOEBE, P.
Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung, IV, Acta Math., vol. 41, 1920, pp. 235—301.
KUFAREFF, P.
Ueber das zweifach zusammenhängende Minimalgebiet, Bull. Inst. Math. et Mec. Univ. de Tomsk, vol. 1, 1935—1937, pp. 228—236.
LEHTO, O.
Anwendung orthogonaler Systeme auf gewisse funktionentheoretische Extremal-und Abbildungs-probleme. Helsinki, 1949.
LICHTENSTEIN, L.
Neuere Entwicklung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus, Enz. Math. Wiss. vol. II, 3, 1.
LOKKI, O.
Ueber Existenzbeweise einiger mit Extremaleigenschaft versehenen analytischen Funktionen, Ann. Acad. Sci. Fennical, Series A, Number 76, 1950, 15 pp.
MARTIN, W. T.
Minimum problem in the theory of analytic functions of several variables, Trans. Am. Math. Soc., vol. 48, 1940, pp. 350—358.
MINIATOFF, A.
[1] *Sur une propriété des transformations dans l'espace de deux variables complexes,* Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 200, 1935, pp. 711—713.
[2] *Zum Interpolationsproblem bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher,* Comptes Rendus, Acad. Sc., U.R.S.S., nouv. sér., vol. 4, 1935, pp. 243—245.
NEHARI, Z.
[1] *The kernel function and canonical conformal maps,* Duke Math. J., vol. 16, 1949, pp. 165—178.
[2] *On analytic functions possessing a positive real part,* Duke Math. J., vol. 15, 1948, pp. 1033—1042.
[3] *The kernel function and the construction of conformal maps,* Transactions of Symposium on Conformal Mapping, National Bureau of Standards, To appear.
[4] *On bounded analytic functions,* Bull. Am. Math. Soc.
OKA, K.

Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Jour. of Science of the Hiroshima University, Series A, vol. 6, 1936, pp. 245—255; vol. 7, 1937, pp. 115—130; vol. 9, 1939, pp. 8—19. Japanese Jour. Math., vol. 17, 1941, pp. 517—521; Vol. 17 1941, pp. 523—531. Tôhoku Math. Jour., vol. 49, 1942, pp. 15—52.

PLEMELJ, J.

Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, Monatsh. f. Math. u. Phys., vol. 19, 1908, pp. 205—210.

POINCARÉ, H.

Sur les résidues des intégrales doubles, Acta Math., vol. 9, 1887, pp. 321—380.

DE POSSEL, R.

Zum Parallelschiltztheorem unendlichvielfach zusammenhàngender Gebiete, Göttinger Nachrichten, 1931, pp. 199—202.

PRIVALOFF, J. J.

Cauchy's integral (Russian), Reports of the Faculty of Physics and Mathematics at the University of Saratow, 1919, pp. 1—96.

REINHARDT, K.

Ueber Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlicher, Math. Ann., vol. 83, 1921.

SARIO, L.

[1] *Existence des fonctions d'allure donnee sur une surface de Riemann arbitraire*, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 229, 1949, pp. 1293—1295.

[2] *Existence des integrales abeliennes sur les surfaces de Riemann arbitraires*, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 230, 1950, pp. 168—171.

SCHIFFER, M.

[1] *Sur les domaines minima dans la théorie des transformations pseudo-conformes*, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 207, 1938, pp. 112—115.

[2] *A method of variation within the family of simple functions*, Proc. London Math. Soc., vol. 44, 1938, pp. 432—449.

[3] *Sur le diamètre transfini d'un continu*, Bull. Soc. Math. de France, vol. 68, 1940, pp. 158—176.

[4] *Variation of the Green function and theory of the p-valued functions*, Am. J. Math., vol. 65, 1943, pp. 341—360.

[5] *The span of multiply-connected domains*, Duke Math. J., vol. 10, 1943, pp. 209—216.

[6] *The kernel function of an orthonormal system*, Duke Math. J., vol. 13, 1946, pp. 529—540.

[7] *On the modulus of a doubly-connected domain*, Quart. J. Math. (Oxford Ser.), 1946, pp. 197—213.

[8] *Hadamard's formula and variation of domain functions*, Am. J. Math., vol. 68, 1946, pp. 417—448.

[9] *An application of orthonormal functions in the theory of conformal mapping*, Am. J. Math., vol. 70, 1948, pp. 147—156.

[10] *On various types of orthogonalization*, Duke Math. J., vol. 17, 1950.

SCHIFFER, M. and SPENCER, D. C.

[1] *Functionals of finite Riemann surfaces*, to appear in Princeton Series, 1951.

[2] *Coefficient problem for multiply-connected domains*, Annals of Math., vol. 52, 1950, pp. 352—402.

SCHMIDT, E.

Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Math. Ann., vol. 63, 1907, pp. 433—476, vol. 64, 1907, pp. 161—174.

SCHOTTKY, E.

Ueber die konforme Abbildung mehrfachzusammenhängender ebener Flächen, J. Reine Angew. Math., vol. 83, 1877.

SHIFFMAN, M.

Uniqueness theorems for conformal mapping of multiply connected domains, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., vol. 27, 1941, pp. 137—139.

SZEGÖ, G.

[1] *Ueber orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören*, Math. Zeits., vol. 9, 1921, pp. 218—270.

WALSH, J. L., and NILSEN, N.

On functions analytic in a region; approximation in the sense of least p powers, Trans. Am. Math. Soc., vol. 65, 1949, pp. 239—258.

WACHS, S.

[1] *Sur quelques propriétés des transformations pseudo-conformes avec un point frontière invariant*, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 206, 1938, pp. 1352—1354.

[2] *Sur quelques propriétés des transformations pseudo-conformes avec un point invariant*, Bull. Soc. Math. de France, vol. 68, 1940, pp. 177—198.

[3] *Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant*, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 208, 1939, pp. 1385—1387.

[4] *Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant*, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris,

vol. 208, 1939, pp. 1871—1873.

[5] *Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant*, J. Math. pures et appl., 9e ser., vol. 22, 1943, pp. 25—54.

WEIL, A.

[1] *Sur les séries de polynomes de deux variables complexes*, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 194, 1932, pp. 1304—1307.

[2] *L'integrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables*, Math. Ann., vol. 111, 1935, pp. 178—182.

WELKE, H.

Über die analytischen Abbildungen von Kreiskörpern und Hartogsschen Bereichen, Math. Ann., vol. 103, 1930, pp. 437—449.

WIRTINEGR, W.

[1] *Zur formalen Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veranderlichen*, Math. Ann., vol. 97, 1927, pp. 357—375.

[2] *Ueber eine Minimalaufgabe im Gebiet der analytischen Funktionen*, Monatsh. f. Math. u. Phys., vol. 39, 1932, pp. 377—384.

ZARANKIEWICZ, K.

[1] *Sur la représentation conforme d'un domaine doublement connexe sur un anneau circulaire*, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 198, 1934, pp. 1347—1349.

[2] *Ueber ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete*, Zeits. f. ang. Math. u. Mech., vol. 14, 1934, pp. 97—104.

ZAREMBA, S.

Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique, Bull. Internat. Acad. Sci., Cracovie, vol. I, 1909, pp. 125—195.

ZYGMUND, A.

[1] *On the boundary values of functions of several complex variables*, I, Fund. Math., vol. 36, 1949, pp. 207—235.

[2] *A remark on functions of several complex variables*, Acta Szeged, 1950. To appear.

索　引

一　畫

二　畫

四　畫

五　畫

六 畫

七 畫

八 畫

九　畫

十　畫

十一畫

十二畫

十 三 畫

十 四 畫

十 五 畫

十 六 畫

十 七 畫

十 八 畫